LÖSUNGSVERFAHREN FÜR EINE KLASSE ZWEISTUFIGER STOCHASTISCHER OPTIMIERUNGSPROBLEME

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von

HANS JOACHIM CLEEF
aus
DUISBURG

BONN 1980

LÖSUNGSVERFAHREN FÜR EINE KLASSE ZWEISTUFIGER STOCHASTISCHER OPTIMIERUNGSPROBLEME

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von

HANS JOACHIM CLEEF
aus
DUISBURG

BONN 1980

Angefertigt mit Genehmigung der Mathem.-Naturw. Fakultät der Universität Bonn

1. Referent: Professor Dr. W. Vogel

2. Referent: Professor Dr. R. Hettich

Institut für Angewandte Mathematik und Informatik der Universität Bonn

Abt. für Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik

Direktor: Professor Dr. W. Vogel

Druck: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Für meine Eltern

Inhalt

Einleitung 7

§1 Zweistufige stochastische Optimierungsmodelle 9

§2 Eine spezielle Klasse zweistufiger stochastischer Programme 15

§3 Optimierungsaufgaben mit stückweise affin-linearer Zielfunktion 18

§4 Ein Subgradientenverfahren für diskret-verteilte Zufallsvariablen bei Verwendung des revidierten Simplexverfahrens 21

§5 Ein stochastisches Flußproblem 34

§6 Ein Lösungsverfahren für das stochastische Flußproblem bei Verwendung des Out-of-kilter Verfahrens 47

§7 Ein Gradientenverfahren für stückweise gleichverteilte Zufallsvariablen 64

Schlußbemerkung 78

Literaturverzeichnis 79

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536524_0022

Einleitung

Bei linearer Modellierung führt der Ansatz der zweistufigen stochastischen Optimierung auf ein konvexes Optimierungsproblem

(*) $\Phi(x) = \text{MIN!}\ ,\ x \in X\ ,$

bei dem die Zielfunktion Φ nur implizit durch die Lösungen einer Klasse von Linearen Programmen gegeben ist. Ausgangspunkt für diesen Ansatz ist dabei ein lineares Optimierungsmodell, bei dem die Daten als Zufallsvariablen mit bekannter Verteilung gegeben sind (§1). Die Berechnung von $\Phi(x)$ für ein festes $x \in X$ ist nur mit erheblichem Aufwand möglich. Ist Φ differenzierbar, so gilt das auch für den Gradienten von Φ. Aus diesem Grund wurde die Möglichkeit verworfen, zur Lösung von (*) bekannte Methoden der konvexen Optimierung (z.B. Gradientenverfahren) einzusetzen.
Daneben bietet sich für (*) eine Linearisierung durch Diskretisierung der Zufallsvariablen an. Das eigentliche Interesse gilt dann der Lösung des aus einer Diskretisierung resultierenden "Großen linearen Programms" durch bekannte Basisreduktionsmethoden, da das revidierte Simplexverfahren in einer Standardversion nicht anwendbar ist.
In dieser Arbeit wird nun für eine spezielle Klasse zweistufiger stochastischer Programme (§2) auf ein Verfahren der zulässigen Richtungen zurückgegriffen und ein Zusammenhang zu den Basisreduktionsmethoden aufgezeigt.
Den Anstoß dazu gaben die in BEER (1977) abgeleiteten Subgradientenverfahren (§3). Bei Anwendung dieser Verfahren auf die vorliegende Situation ergibt sich eine alternative Methode, die Lösung der "Großen linearen Programme" konkret zu realisieren. Dies führt zu einem allgemeinen Konzept, das die Lösung einer (endlichen) Folge linearer Programme vorsieht, die mit einer Standardversion des Simplexverfahrens gelöst werden können. Jedes dieser linearen "Ersatzprogramme" realisiert eine Teiloptimierung in Bezug auf eine "zulässige Abstiegsrichtung" (§4).
Bieten sich zur Lösung der Ersatzprobleme effektivere Verfahren als das revidierte Simplexverfahren an, so läßt sich das allge-

meine Konzept unter Umständen übertragen. Für stochastische Flußprobleme (§5) führt diese Übertragung auf ein Verfahren, für das zur Lösung der Ersatzprobleme das Out-of-kilter Verfahren eingesetzt werden kann (§6). Die Anpassungsfähigkeit des Konzeptes wird dann schließlich an einer speziellen Klasse absolut-stetiger Verteilungen demonstriert (§7).

§1 Zweistufige stochastische Optimierungsmodelle

Ausgangspunkt für die stochastische lineare Optimierung ist ein lineares Programm, in dem ein Teil der Daten nicht fest vorgegebene Konstanten, sondern Zufallsvariablen mit bekannter (gemeinsamer) Verteilung sind.
Der in dieser Arbeit betrachtete zweistufige Ansatz ist eine Möglichkeit, in dieser Situation ein Entscheidungskriterium zu definieren. Einen allgemeinen entscheidungstheoretischen Ansatz, der das zweistufige Modell als Spezialfall enthält, findet man in KALL (1976).
Das zweistufige Modell der stochastischen linearen Optimierung ist durch folgende Größen bestimmt:

(1) Eine konvexe Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b \ , \ x \geq 0\} \ .$$

Dabei ist A eine $(m \times n)$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$ und die Ungleichungen sind komponentenweise zu verstehen.

(2) Ein $c \in \mathbb{R}^n$, das durch $c' \cdot X$ ein lineares Funktional auf $\mathbb{R}^n$ bestimmt. c' bezeichnet dabei die Transponierte von c.

(3) Einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. (vgl. VOGEL (1970))

(4) Eine meßbare Transformation (Zufallsvariable)

$$(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{d}): (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}^N, \mathfrak{B}^N) \ , \ N = \bar{m} \cdot (n + 1) + \bar{n}$$

Dabei ist $\underset{\sim}{q}(\omega) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, $\underset{\sim}{d}(\omega) \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$, $\underset{\sim}{T}(\omega)$ eine $(\bar{m} \times n)$-Matrix.
$\mathfrak{B}^N$ bezeichnet den N-dimensionalen Borelkörper.

(5) Eine $(\bar{m} \times \bar{n})$-Matrix W.

Für die in (1) - (5) definierten Größen machen wir die folgenden

1.1 Generalvoraussetzungen

V1) $X \neq \emptyset$

V2) $\{z \in \mathbb{R}^{\bar{m}} \mid (\exists\, y \geq 0)\colon Wy = z\} = \mathbb{R}^{\bar{m}}$ ①

V3) $\{\pi \in \mathbb{R}^{\bar{m}} \mid \pi' \cdot W \leq q'(\omega)\} \neq \emptyset \quad (P)$ ②

V4) Die einzelnen Komponenten von $(\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{d})$ sind **bezüglich P quadratisch integrierbar.**

Das zweistufige stochastische Programm ist dann gegeben als:

1.2 $$c' \cdot x + \int_{\Omega} \inf\{q'(\omega) y \mid Wy = \underset{\sim}{d}(\omega) - \underset{\sim}{T}(\omega) \cdot x,\ y \geq 0\} P(d\omega) = \text{MIN!}$$

bzgl. $x \in X$.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\varphi(x,\omega) = \inf\{q'(\omega) \cdot y \mid Wy = \underset{\sim}{d}(\omega) - \underset{\sim}{T}(\omega) \cdot x,\ y \geq 0\}$$

und

$$\Phi(x) = c' \cdot x + \int_{\Omega} \varphi(x,\omega) P(d\omega) \ .$$

Dann gilt

1.3 Satz:

(a) $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$ ③ $\quad -\infty < \varphi(x,\omega) < +\infty \quad (P)$

(b) $(\forall x \in \mathbb{R}^n) \quad -\infty < \Phi(x) < +\infty$

(c) $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist konvex

(d) $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.

---

① Wir verwenden das Symbol $(\exists \ldots)$ für "es existiert ...".

② (P) steht für "P-fast sicher", vgl. VOGEL (1970)

③ Wir verwenden das Symbol $(\forall \ldots)$ für "für alle ... gilt".

Beweis: z.B. KALL (1976), KOLBIN (1977)

Eine ausführliche Behandlung mit Anwendungsbeispielen und Interpretationsmöglichkeiten findet man in KALL (1976), KOLBIN (1977). Während in den letzten zwanzig Jahren eine Vielzahl von Arbeiten zur Theorie und zu Anwendungen dieses Modells erschienen sind (eine Übersicht bietet die Bibliographie von STANCU-MINASIAN/WETS (1976) und die Literaturhinweise in KOLBIN (1977)), blieb das Problem der effizienten Lösung derartiger Optimierungsprobleme ungelöst. Ausgangspunkt für mögliche Ansätze ist dabei

1.4 Satz:
Ist das Maß P bezüglich des Lebesgue-Maßes absolut-stetig ①, so ist Φ stetig differenzierbar.

Beweis: z.B. KALL (1976)

denn da nach Satz 1.3 die Zielfunktion konvex ist, bieten sich Gradientenverfahren an, wie sie allgemein für Optimierungsaufgaben mit konvexer differenzierbarer Zielfunktion entwickelt wurden.

Für das vorliegende Problem sind diese Methoden jedoch nicht direkt anwendbar, da sowohl die Zielfunktion Φ von 1.2 als auch der Gradient von Φ (vgl. Beweis von Satz 1.4) nur implizit gegeben und eine wiederholte Berechnung dieser Funktionen zu aufwendig ist. Theoretisch sind diese Methoden aber anwendbar. (vgl. z.B. KALL (1976))

Ein weiterer Ansatzpunkt ist

1.5 Satz:
Ist das Maß P endlich diskret ①, so läßt sich 1.2 äquivalent

---

① vgl. VOGEL (1970)

als lineares Programm mit "blockangularer Struktur" [1] formulieren.

Beweis: z.B. KALL (1976)

Die Anzahl der möglichen Realisationen von $\underset{\sim}{d}$ bestimmt dabei die Anzahl der Blöcke, und zur Lösung der äquivalenten linearen Programme werden die in BEER (1977) zusammenfassend dargestellten Verfahren benutzt.
Der folgende Satz eröffnet dann die Möglichkeit, allgemeinere Verteilungen durch Approximation in den Griff zu bekommen.
Sei dazu

$$(\underset{\sim}{q}^{(k)}, \underset{\sim}{T}^{(k)}, \underset{\sim}{d}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$$

eine Folge endlich-diskret verteilter Zufallsvariablen mit

1.6 $$(\underset{\sim}{q}^{(k)}, \underset{\sim}{T}^{(k)}, \underset{\sim}{d}^{(k)}) \xrightarrow[k \to \infty]{} (\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{d}) \quad (P)$$

und

1.7 $$\|q^{(k)}(\omega)\| \leq \|q(\omega)\|, \quad \|T^{(k)}(\omega)\| \leq \|T(\omega)\|$$
$$\|\underset{\sim}{d}^{(k)}(\omega)\| \leq \|d(\omega)\| \quad \text{für alle } \omega \in \Omega \text{ [2]}$$

Dann gilt

1.8 Satz:
Falls für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\{\pi \in \mathbb{R}^{\bar{m}} \mid \pi' W \leq q^{(k)'}(\omega)\} \neq \emptyset \quad (P)$$

und X beschränkt ist, so gilt für

---

[1] vgl. BEER (1977)

[2] $\|\cdot\|$ bezeichnet hier die Supremumsnorm.

1.9 $\Phi^{(k)}(x)=c'\cdot x+\int_{\Omega}\min\{q^{(k)}(\omega)\cdot y \mid Wy=d^{(k)}(\omega)-T^{(k)}(\omega)\cdot x, y\geq 0\}P(d\omega)$

(1) $(\forall x \in \mathbb{R}^n) \quad \lim_{k\to\infty} \Phi^{(k)}(x) = \Phi(x)$

(2) $\Phi_*^{(k)} = \min\{\Phi^{(k)}(x) \mid x \in X\} \underset{k\to\infty}{\to} \Phi_* = \min\{\Phi(x) \mid x \in X\}$

(3) $\bar{x}^{(k)} \in X$ mit $\Phi_*^{(k)} = \Phi^{(k)}(\bar{x}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \{\bar{x}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ hat einen Häufungspunkt und jeder Häufungspunkt $\bar{x} \in X$ erfüllt $\Phi_* = \Phi(\bar{x})$.

Beweis: KALL (1974)

Über diese Aussagen hinaus enthält die Arbeit von KALL (1974) auch noch Abschätzungen für $|\Phi^{(k)}(x) - \Phi(x)|$ in Abhängigkeit von der "Güte" der Approximation.
Nach Satz 1.5 führen endlich-diskret verteilte Zufallsvariablen auf ein lineares Programm, dessen Dimension i.a. sehr groß ist, insbesondere dann, wenn die diskrete Verteilung nicht a priori, sondern als Approximation einer stetigen Verteilung gegeben ist. Die Anwendung sogenannter "Basisreduktionsmethoden" mit dem Ziel, die Dimension der numerisch zu invertierenden Basismatrix zu reduzieren, findet man in den Arbeiten EL AGIZY (1967), GARSTKA/RUTENBERG (1973), STRAZICKY (1974), WERNER (1973) und WETS (1974).
In KALL (1979) findet man für das in STRAZICKY (1974) angegebene Verfahren quantitative Aussagen über das Ausmaß der Reduktion.
Das rapide Anwachsen der Dimensionen der zu lösenden linearen Programme liegt zum größten Teil sicher in der Notwendigkeit, die gegebenen Verteilungen global zu diskretisieren (vgl. hierzu KALL (1979)). Auf der anderen Seite bieten die oben erwähnten Ansätze keine anderen Möglichkeiten.
Betrachtet man die Anwendungen des zweistufigen Modells, so ist hier zu beobachten, daß sie nahezu alle in eine spezielle Klasse fallen, die einer effektiven numerischen Lösung

eher zugänglich erscheint.
Im folgenden Paragraphen wird diese spezielle Klasse vorgestellt.
Das Ziel dieser Arbeit ist es, für diese spezielle Klasse ein Lösungsverfahren anzugeben. Dabei wurde darauf verzichtet, nur solche Verfahren zu betrachten, die sich (formal) auf allgemeinere Ansätze übertragen lassen. Es wird vielmehr versucht, die speziellen Eigenschaften, die sich durch Einschränkung auf diese Klasse ergeben, soweit wie möglich in die Verfahren eingehen zu lassen.

§2 Eine spezielle Klasse zweistufiger stochastischer Programme

Das allgemeine zweistufige Modell aus §1 wird in zweifacher Hinsicht eingeschränkt,

2.1 $$\underset{\sim}{T}(\omega) = T \ , \ \underset{\sim}{q}(\omega) = q$$

2.2 $$W = (E,-E) \quad .$$ ①

Analog der Zerlegung von W in 2.2 schreiben wir

$$q' = ((q^+)',(q^-)') \ , \ q^+,q^- \in \mathbb{R}^{\bar{m}}.$$

Die allgemeine Voraussetzung V2 ist hier stets erfüllt und V3 geht über in

2.3 $$(\forall\ 1 \le i \le \bar{m}) \quad q_i^+ + q_i^- \ge 0 \ .$$

Nach KALL (1976) genügt es für die zufällige Größe $\underset{\sim}{d}_i$, $1 \le i \le \bar{m}$ an Stelle von V4

2.4 $\underset{\sim}{d}_i$ ist bezüglich P integrierbar

zu fordern. Die Aussagen der Sätze aus §1 bleiben dann richtig.
Bezeichne T_i die i-te Zeile der Matrix T. Mit

$$\Phi_i(x) = \int_\Omega \max\{\pi_i(\underset{\sim}{d}_i(\omega)-T_i x) \mid -q_i^- \le \pi_i \le q_i^+\} P(d\omega)$$

nimmt dann 1.2 die Gestalt

2.5 $$c'\cdot x + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \Phi_i(x) = \text{MIN!} \quad \text{bzgl. } x \in X$$

an. Ist $q_i^+ + q_i^- = 0$, so folgt $\Phi_i(x) = q_i^+ \cdot \int_\Omega d_i(\omega) P(d\omega) - q_i^+ T_i x$

und die Funktion Φ_i ist linear in x.
Wir setzen deshalb

2.6 $$(q_i^+ + q_i^-) > 0 \qquad 1 \le i \le \bar{m}$$

---

① E bezeichnet hier die Einheitsmatrix.

voraus.
In das Optimierungsproblem 2.5 gehen nur die Verteilungen der Komponenten von $\underset{\sim}{d}$ ein. Bezeichne F_i die Verteilungsfunktion von $\underset{\sim}{d}_i$ (vgl. VOGEL (1970)),

2.7 $$F_i(\lambda_i) = P(\underset{\sim}{d}_i \leq \lambda_i) \ .$$

2.8 Definition:
Die zufällige Größe $\underset{\sim}{d}_i$ heißt endlich diskret verteilt, wenn es eine Menge $\{d_{ik} \mid 1 \leq k \leq r_i\}$ und $p_{ik} > 0$, $1 \leq k \leq r_i$ gibt, so daß

$$P(\underset{\sim}{d}_i = d_{ik}) = p_{ik} \ , \ 1 \leq k \leq r_i \ ; \ \sum_{k=1}^{r_i} p_{ik} = 1 \ .$$

Es wird dabei stets

$$d_{i1} < d_{i2} < \ldots < d_{ir_i}$$

angenommen.

Für endlich diskret verteilte $\underset{\sim}{d}_i$ ergibt sich (vgl. Satz 1.5) das folgende zu 2.5 äquivalente lineare Programm (WETS (1974)).

$$(A = (A_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} , T = (T_{ij})_{\substack{1\leq i\leq \bar{m}\\ 1\leq j\leq n}} , c' = (c_1,\ldots,c_n)) :$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \Big(\sum_{k=0}^{r_i} (-q_i^+ + (q_i^+ + q_i^-) P(\underset{\sim}{d}_i \leq d_{ik})) \cdot y_{ik} \Big) = \text{MIN!}$$

2.9
$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n} T_{ij} x_j - \sum_{k=0}^{r_i} y_{ik} = d_{io} \qquad i = 1,2,\ldots,\bar{m}$$

$$0 \leq y_{ik} \leq d_{i(k+1)} - d_{ik} \qquad i = 1,2,\ldots,\bar{m} \ , \ k = 0,1,\ldots,r_i$$

$$0 \leq x_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

dabei sind $d_{io} < d_{i1}$ und $d_{ir_i} < d_{i(r_i+1)}$ so gewählt, daß

$$d_{io} \leq T_i x^* \leq d_{i(r_i+1)}$$

für eine optimale Lösung x^* von 2.5 gilt.
In WETS (1974) wird das Programm 2.9 mit der "Simplexmethode für obere Schranken" (vgl. ZIONTS (1974)) gelöst.
WERNER (1973) geht von einer anderen äquivalenten Formulierung von 2.5 aus,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{\bar{m}} (q_i^+ + q_i^-) \cdot \left(\sum_{k=1}^{r_i} p_{ik} y_{ik}^+ \right) = \text{MIN!}$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

2.10

$$\sum_{j=1}^{n} T_{ij} x_j + y_{ik}^+ - y_{ik}^- = d_{ik} \;,\; i = 1,2,\ldots,\bar{m} \;,\; k = 1,2,\ldots,r_i$$

$$x_j \;,\; y_{ik}^+ \;,\; y_{ik}^- \geq 0$$

und verwendet zur Lösung das Dekompositionsprinzip (vgl. DANTZIG (1966), ZIONTS (1974)).
In beiden Verfahren werden zur Lösung von 2.5 Modifikationen des Simplexverfahrens herangezogen. Man beachte, daß in 2.9 und 2.10 r_i i.a. sehr groß ist.
In dieser Arbeit soll im Gegensatz dazu ein Lösungsverfahren vorgeschlagen werden, das nur auf eine Standardversion des Simplexverfahrens zurückgreift.
Im folgenden Paragraphen werden zunächst einige Ergebnisse zusammengestellt, die später bei der Herleitung des Verfahrens benötigt werden.

§3 Optimierungsaufgaben mit stückweise affin-linearer Zielfunktion

In BEER (1977) werden Maximierungsaufgaben mit stückweise affin-linearer konkaver Zielfunktion betrachtet. Die dort formulierten Definitionen und Aussagen lassen sich in einfacher Weise auf Minimierungsaufgaben mit konvexer Zielfunktion übertragen. In diesem Sinne sind Hinweise auf BEER (1977) zu verstehen.
Eine Funktion $\Psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Gestalt $\psi(x) = c' \cdot x + \gamma$ mit $c \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ heißt affin-linear.
Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die sich als Durchschnitt endlich vieler Halbräume darstellen läßt, bezeichnen wir als konvexe polyedrale Menge.

3.1 Definition (BEER (1977), Def. 3.1):
Eine konvexe[①] Funktion $\Psi\colon X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex[①], heißt stückweise affin-linear auf X (kurz SALK-Funktion auf X), wenn es ein $r \in \mathbb{N}$, affin-lineare Funktionen Ψ_l, $(l = 1,2,\ldots,r)$ und konvexe polyedrale Mengen $X_l \subseteq \mathbb{R}^n$, $(l = 1,2,\ldots,r)$ gibt, so daß gilt:

(1) $\Psi(x) = \Psi_l(x) \quad \forall\, x \in X_l \quad (l = 1,2,\ldots,r)$

(2) $\bigcup_{l=1}^{r} X_l = X$

(3) $ri(X_l) \cap ri(X_{l'}) = \emptyset$ für $l \neq l'$[②].

Jede SALK-Funktion auf X läßt sich dann als konvexe (obere) Einhüllende endlich vieler affin-linearer Funktionen darstellen.

---

① vgl. HOLMES (1972)

② $r_i(X_l)$ bezeichnet das relative Innere von X_l (HOLMES (1972)).

3.2 Satz:

ψ ist eine SALK-Funktion auf X genau dann, wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ und affin-lineare Funktionen ψ_l, $l = 1,2,\ldots,r$ gibt, so daß

3.3 $$(\forall\, x \in X) \quad \psi(x) = \max\{\psi_l(x) \mid l \in \{1,2,\ldots,r\}\}$$

ist.

Beweis: BEER (1977), Satz 3.4, Bemerkung 3.12

3.4 Definition:

Sei $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Ein $\eta \in \mathbb{R}^n$ heißt Subgradient von ψ in $\bar{x}$, wenn

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)\colon \eta' \cdot (x - \bar{x}) \leq \psi(x) - \psi(\bar{x})$$

Bezeichne $\partial\psi(\bar{x})$ die Menge aller Subgradienten von ψ in $\bar{x}$.

Sei ψ eine SALK-Funktion auf X. Für $\bar{x} \in X$ bezeichne $L(\bar{x})$ die Menge der Indizes $l \in \{1,2,\ldots,r\}$ für die das Maximum in 3.3 angenommen wird und $S(\bar{x})$ die Menge der zulässigen Richtungen von X in $\bar{x}$, also

$$L(\bar{x}) = \{l \in \{1,2,\ldots,r\} \mid \psi(\bar{x}) = \psi_l(\bar{x})\}$$

$$S(\bar{x}) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, \lambda^* > 0)\colon (\forall\, 0 \leq \lambda \leq \lambda^*)\, \bar{x} + \lambda \cdot s \in X\}$$

Sei

$$S^o(\bar{x}) = \{\eta \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, s \in S(\bar{x}))\ \eta' \cdot s \geq 0\}$$

der konjugierte Kegel von $S(\bar{x})$ und sei

$$\psi_l(x) = c_l' \cdot x + \gamma_l \,, \quad l = 1,2,\ldots,r \,.$$

3.5 Satz:

Für alle $\bar{x} \in X$ ist $\partial\psi(\bar{x}) \neq \emptyset$ und es gilt

$$\partial\psi(\bar{x}) = \mathrm{con}\{c_l \mid l \in L(\bar{x})\} - S^o(\bar{x}) \quad .$$

$\mathrm{con}\{c_l \mid l \in L(\bar{x})\}$ bezeichnet die konvexe Hülle von $\{c_l \mid l \in L(\bar{x})\}$.

Beweis: BEER (1977), Satz 3.12

Die optimalen Lösungen von

3.6 $$\Psi_* = \inf\{\Psi(x) \mid x \in X\}$$

lassen sich dann charakterisieren durch

3.7 **Satz:**
$\bar{x} \in \mathbf{X}$ ist genau dann optimale Lösung von 3.6, wenn es eine optimale Lösung $(\bar{s},\bar{\delta})$ von

$$\delta = \text{MIN!}$$

3.8 $$c_l^! \cdot s \leq \delta,\ l \in L(\bar{x})$$

$$s \in S(\bar{x})$$

mit $\bar{\delta} = 0$ gibt.

Beweis: BEER (1977), Satz 3.22

Auf Grund dieser Aussage von Satz 3.7 lassen sich allgemein zur Lösung von 3.6 Subgradientenverfahren bzw. Verfahren der zulässigen Richtungen formulieren (BEER (1977) Abschnitt 3.6).
Wir werden im folgenden Paragraphen eine spezielle solche Möglichkeit zur Lösung des zweistufigen stochastischen Programms 2.5 vorschlagen.

§4 Ein Subgradientenverfahren für diskret-verteilte Zufallsvariablen bei Verwendung des revidierten Simplexverfahrens

Um die Ergebnisse von §3 auf unser Problem 2.5 anwenden zu können, zeigen wir zunächst, daß die Zielfunktion

4.1 $$\Phi(x) = c' \cdot x + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \Phi_i(T_i x)$$

für endlich diskret-verteilte Zufallsvariablen eine SALK-Funktion auf

$$X = \{x \geq 0 \mid Ax \geq b\}$$

ist und geben eine Darstellung der Form 3.3 an.
Für $1 \leq i \leq \bar{m}$ bezeichne

$$d_{i1} < d_{i2} < \ldots < d_{ir_i}$$

die der Größe nach geordneten Realisationen von $\underset{\sim}{d}_i$, d.h.

$$P(\underset{\sim}{d}_i = d_{ik}) = p_{ik} > 0 \ , \ \sum_{k=1}^{r_i} p_{ik} = 1 \ .$$

Den entarteten Fall einer Einpunktverteilung schließen wir aus, also $r_i > 0$.
Um eine einheitliche Bezeichnungsweise wählen zu können, setzen wir formal

$$d_{io} = -\infty, \ d_{i(r_i+1)} = +\infty, \ p_{io} = p_{i(r_i+1)} = 0$$

und vereinbaren $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.
Definiere

$$L = \{(l_1,\ldots,l_{\bar{m}}) \mid l_i \in \{0,1,2,\ldots,r_i\}\}$$

und für $l = (l_1,\ldots,l_{\bar{m}}) \in L$

$$\rho_{il_i} = -q_i^+ + (q_i^+ + q_i^-) \cdot \left(\sum_{k=0}^{l_i} p_{ik} \right)$$

$$\rho_{(l)} = (\rho_{1l_1}, \ldots, \rho_{\bar{m}l_{\bar{m}}})'$$

$$\gamma_{il_i} = -q_i^-\left(\sum_{k=0}^{l_i} p_{ik}\cdot d_{ik}\right) + q_i^+\left(\sum_{k=l_i+1}^{r_i+1} p_{ik}\cdot d_{ik}\right)$$

$$\gamma_{(l)} = \sum_{i=1}^{\bar{m}} \gamma_{il_i}$$

$$c'_{(l)} = c' + \rho'_{(l)}\cdot T$$

Dann gilt

4.2 Lemma:

Φ ist eine SALK-Funktion auf X mit

$$(\forall\, x \in X) \quad \Phi(x) = \max\{c'_{(l)}\cdot x + \gamma_{(l)} \mid l \in L\}\ .$$

Beweis: Für festes $x \in X$ gibt es $\bar{l} \in L$ mit

$$d_{i\bar{l}_i} \le T_i x \le d_{i(\bar{l}_i+1)} \qquad 1 \le i \le \bar{m}\ .$$

Daraus folgt zunächst $d_{ik} - T_i x \le 0$ für $0 \le k \le \bar{l}_i$ und

$d_{ik} - T_i x \ge 0$ für $\bar{l}_i + 1 \le k \le r_i + 1$ und damit

$$\Phi(x) = c'\cdot x + \sum_{i=1}^{\bar{m}}\left(\left(\sum_{k=0}^{\bar{l}_i} p_{ik}\cdot q_i^-(T_i x - d_{ik})\right) + \left(\sum_{k=\bar{l}_i+1}^{r_i+1} p_{ik}\cdot q_i^+(d_{ik} - T_i\right)\right.$$

$$= c'\cdot x + \sum_{i=1}^{\bar{m}}\left(\gamma_{i\bar{l}_i} + \left(q_i^-\left(\sum_{k=0}^{\bar{l}_i} p_{ik}\right) - q_i^+\left(1 - \sum_{k=0}^{\bar{l}_i} p_{ik}\right)\right)\cdot T_i x\right)$$

$$= c'\cdot x + \gamma_{(\bar{l})} + \rho_{(\bar{l})} Tx$$

$$= \left(c'_{(\bar{l})}\cdot x + \gamma_{(\bar{l})}\right)$$

also

4.3 $$\Phi(x) \le \max\{c'_{(l)} \cdot x + \gamma_{(l)} \mid l \in L\} .$$

Sei $l = (l_1,\ldots,l_{\bar m}) \in L$ beliebig. Für $l_i = \bar l_i$ gilt trivialerweise

4.4 $$\rho_{il_i} \cdot T_i x + \gamma_{il_i} \le \rho_{i\bar l_i} \cdot T_i x + \gamma_{i\bar l_i} .$$

Für $l_i < \bar l_i$ gilt zunächst

$$\gamma_{il_i} - \gamma_{i\bar l_i} = (q_i^+ + q_i^-) \cdot \Big(\sum_{k=l_i+1}^{\bar l_i} p_{ik} \cdot d_{ik}\Big)$$

und (beachte 2.6)

4.5 $$\rho_{i\bar l_i} - \rho_{il_i} = (q_i^+ + q_i^-) \cdot \Big(\sum_{k=l_i+1}^{\bar l_i} p_{ik}\Big) > 0 .$$

Wegen $d_{ik} \le T_i x \quad (l_i+1 \le k \le \bar l_i)$ folgt damit 4.4 auch für $l_i < \bar l_i$.

Analog ergibt sich 4.4 für $l_i > \bar l_i$ und damit durch Summation über $i \in \{1,2,\ldots,\bar m\}$

$$(\forall\, l \in L) \quad c'_{(l)} \cdot x + \gamma_{(l)} \le c'_{(\bar l)} \cdot x + \gamma_{(\bar l)} .$$

Aus 4.3 und Satz 3.2 folgt dann die Behauptung. □

4.6 Korollar:
Für $x \in X$ und $\bar l \in L$ wie im Beweis von Lemma 4.2 gilt

$(l_1,\ldots,l_{\bar m}) \in L(\bar x)$ genau dann, wenn

$l_i = \bar l_i$ falls $d_{i\bar l_i} < T_i x < d_{i(\bar l_i+1)}$

$$l_i \in \{\bar{l}_i, \bar{l}_i+1\} \quad \text{falls} \quad T_i x = d_{i(\bar{l}_i+1)}$$

$$l_i \in \{\bar{l}_i, \bar{l}_i-1\} \quad \text{falls} \quad T_i x = d_{i\bar{l}_i} \; .$$

Beweis: In den verschiedenen Fällen gilt wegen 2.6 genau für die angegebenen l_i in 4.4 Gleichheit. □

Für fest gewähltes $\bar{l} = (\bar{l}_1,\ldots,\bar{l}_m) \in L$ bestimmt

4.7 $$X_{(\bar{l})} = \{x \in X \mid (\forall\, 1 \le i \le m): d_{i\bar{l}_i} \le T_i x \le d_{i(\bar{l}_i+1)}\}$$

die Menge der zulässigen $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\Phi(x) = c'_{(\bar{l})} \cdot x + \gamma_{(\bar{l})}$$

und

4.8 $$\min\{\Phi(x) \mid x \in X_{(\bar{l})}\}$$

ist (im Wesentlichen) ein lineares Optimierungsproblem. Falls alle "Schranken" für $T_i x$ in 4.7 endlich sind, d.h. $0 < l_i < r_i$, so läßt sich 4.8 bis auf einen konstanten Term in der Zielfunktion durch Hinzufügen von Slackvariablen als lineares Programm mit Gleichheitsrestriktionen schreiben,

$$(LP)_{(\bar{l})} \qquad \begin{aligned} c'_{(\bar{l})} \cdot x &= \text{MIN!} \\ Ax - y &= b \\ -Tx - u &= -h_{(\bar{l})} \\ Tx - v &= g_{(\bar{l})} \\ x,y,u,v &\ge 0 \end{aligned}$$

mit

$$g_{(\bar{l})} = (d_{1\bar{l}_1}, d_{2\bar{l}_2}, \ldots, d_{\bar{m}\bar{l}_{\bar{m}}})'$$

$$h_{(\bar{l})} = (d_{1(\bar{l}_1+1)}, d_{2(\bar{l}_2+1)}, \ldots, d_{\bar{m}(\bar{l}_{\bar{m}}+1)})'$$

und das dazu duale Programm (vgl. DANTZIG (1966)) ist

$$\sigma' \cdot b - \mu' \cdot h_{(\bar{l})} + \nu' \cdot g_{(\bar{l})} = \text{MAX!}$$

$$(LD)_{(\bar{l})} \qquad \sigma' \cdot A - \mu' \cdot T + \nu' \cdot T \leq c'_{(\bar{l})}$$

$$\sigma, \mu, \nu \geq 0 \ , \ \sigma \in \mathbb{R}^m \ , \ \mu, \nu \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$$

Wir werden die gleiche Notation auch für die Fälle $\bar{l}_i = 0$ und $\bar{l}_i = r_i$ benutzen. Dazu fordern wir, daß in diesen Fällen die entsprechende Slackvariable in $(LP)_{(\bar{l})}$ stets Basisvariable sein soll und die entsprechende Dualvariable gleich Null sein soll.

Falls $(LP)_{(\bar{l})}$ zulässige Lösungen besitzt, so liefert das revidierte Simplexverfahren entweder komplementäre optimale Basislösungen[①] von $(LP)_{(\bar{l})}$ und $(LD)_{(\bar{l})}$, oder es stellt die Unzulässigkeit von $(LD)_{(\bar{l})}$ fest.

Da X nach Voraussetzung nicht leer ist, gibt es stets mindestens ein $\bar{l} \in L$, so daß $(LP)_{(\bar{l})}$ zulässige Lösungen besitzt.

4.9 Satz:

Ist $(LP)_{(\bar{l})}$ zulässig, so gilt

---

① siehe z.B. DANTZIG (1966), Kap. 11-1

(1) Aus $(LD)_{(\bar{l})}$ unzulässig folgt

$$\inf\{\Phi(x) \mid x \in X\} = -\infty .$$

(2) Sind $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{u}', \bar{v}')'$ und $(\bar{\sigma}', \bar{\mu}', \bar{\nu}')'$ komplementäre optimale Basislösungen von $(LP)_{(\bar{l})}$ und $(LD)_{(\bar{l})}$, so folgt aus

4.10 $$\bar{\mu}_i \leq (q_i^+ + q_i^-) \cdot p_{i(\bar{l}_i+1)} \quad , 1 \leq i \leq \bar{m}$$

4.11 $$\bar{\nu}_i \leq (q_i^+ + q_i^-) \cdot p_{i\bar{l}_i} \quad , 1 \leq i \leq \bar{m}$$

daß $\bar{x}$ optimale Lösung des zweistufigen stochastischen Programms 2.5 ist, also

$$\Phi(\bar{x}) = \min\{\Phi(x) \mid x \in X\} .$$

Beweis:

(1) Aus $\emptyset \neq X_{(\bar{l})} \subseteq X$ folgt

$$\inf\{\Phi(x) \mid x \in X_{(\bar{l})}\} \geq \inf\{\Phi(x) \mid x \in X\}$$

und damit folgt aus dem Dualitätssatz der linearen Programmierung (vgl. DANTZIG (1966)) die Behauptung von (1).

(2) Wir zeigen zunächst

4.12 $$(\forall\, l \in L(\bar{x})) \quad \min\{c'_{(l)} \cdot x \mid x \in X_{(l)}\} = c'_{(l)} \cdot \bar{x} .$$

Sei $l = (l_1, \ldots, l_{\bar{m}}) \in L(\bar{x})$. Dann folgt aus Korollar 4.6, daß $l_i \in \{\bar{l}_i - 1, \bar{l}_i, \bar{l}_i + 1\}$ ist und weiter, daß $l_i = \bar{l}_i + 1$ (bzw. $l_i = \bar{l}_i - 1$) nur möglich ist, falls $T_i \bar{x} = d_{i(\bar{l}_i+1)}$

(bzw. $T_i\bar{x} = d_{i\bar{l}_i}$) ist.

Die Vektoren $\bar{x},\bar{y},\tilde{u},\tilde{v}$ mit

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} \bar{u}_i & \text{falls } l_i = \bar{l}_i \\ d_{i(l_i+1)} - d_{il_i} & \text{falls } l_i = \bar{l}_i + 1 \\ 0 & \text{falls } l_i = \bar{l}_i - 1 \end{cases}$$

und

$$\tilde{v}_i = \begin{cases} \bar{v}_i & \text{falls } l_i = \bar{l}_i \\ 0 & \text{falls } l_i = \bar{l}_i + 1 \\ d_{i(l_i+1)} - d_{il_i} & \text{falls } l_i = \bar{l}_i - 1 \end{cases}$$

bilden dann eine zulässige Basislösung von $(LP)_{(1)}$.

Für $\bar{\sigma},\tilde{\mu},\tilde{\nu}$ mit

$$\tilde{\mu}_i = \begin{cases} \bar{\mu}_i & \text{falls } l_i = \bar{l}_i \\ 0 & \text{falls } l_i = \bar{l}_i + 1 \\ (q_i^+ + q_i^-)\cdot p_{i\bar{l}_i} - \bar{v}_i & \text{falls } l_i = \bar{l}_i - 1 \end{cases}$$

und

$$\tilde{\nu}_i = \begin{cases} \bar{\nu}_i & \text{falls } l_i = \bar{l}_i \\ (q_i^+ + q_i^-)\cdot p_{i(\bar{l}_i+1)} - \bar{\mu}_i & \text{falls } l_i = \bar{l}_i + 1 \\ 0 & \text{falls } l_i = \bar{l}_i - 1 \end{cases}$$

folgt dann aus $\bar{\mu},\bar{\nu} \geq 0$ und 4.10, 4.11, daß $\tilde{\mu},\tilde{\nu} \geq 0$. Man verifiziert leicht die Gleichung (siehe 4.5)

4.13 $$\rho_{i\bar{l}_i} + \bar{\mu}_i - \bar{\nu}_i = \rho_{il_i} + \tilde{\mu}_i - \tilde{\nu}_i \ .$$

Aus der Zulässigkeit von $\bar{\sigma},\bar{\mu},\bar{\nu}$ in $(LD)_{(\bar{l})}$ und 4.13 folgt dann

$$\bar{\sigma}'A - \tilde{\mu}'T + \tilde{\nu}'T = \bar{\sigma}'A - (\rho'_{(\bar{l})} + \bar{\mu}' - \bar{\nu}')\cdot T + \rho'_{(l)}\cdot T$$

$$\leq c' + \rho'_{(l)}\, T$$

$$= c'_{(l)}$$

und damit die Zulässigkeit von $\bar{\sigma},\tilde{\mu},\tilde{\nu}$ in $(LP)_{(l)}$.

Da $(\bar{x}',\bar{y}',\bar{u}',\bar{v}')'$ und $(\bar{\sigma}',\bar{\mu}',\bar{\nu}')'$ optimale komplementäre Basislösungen von $(LP)_{(\bar{l})}$ und $(LD)_{(\bar{l})}$ sind, folgt

4.14 $$[c' + \rho'_{(\bar{l})}\, T]\cdot\bar{x} = \bar{\sigma}'b - \bar{\mu}'h_{(\bar{l})} + \bar{\nu}'g_{(\bar{l})} \quad , \ \bar{\sigma}'(b - A\bar{x}) = 0$$

4.15 $$\bar{\mu}'(h_{(\bar{l})} - T\bar{x}) = 0$$

4.16 $$\bar{\nu}'(g_{(\bar{l})} - T\bar{x}) = 0 \ .$$

Nach Konstruktion von $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$ (vgl. Korollar 4.6) folgt

$$\tilde{\mu}'(h_{(l)} - T\bar{x}) = 0$$

$$\tilde{\nu}'(g_{(l)} - T\bar{x}) = 0$$

und damit ergibt sich aus 4.13, 4.14

$$(c' + \rho'_{(l)}\cdot T)\bar{x} = (c' + (\rho'_{(\bar{l})} + \bar{\mu}' - \bar{\nu}')\cdot T)\bar{x} - (\tilde{\mu}' - \tilde{\nu}')\cdot T\bar{x}$$

$$= \bar{\sigma}'b - \bar{\mu}'h_{(\bar{l})} + \bar{\nu}'g_{(\bar{l})} + (\bar{\mu}' - \bar{\nu}' - \tilde{\mu}' + \tilde{\nu}')\cdot T$$

$$= \bar{\sigma}'b - (\tilde{\mu}' - \tilde{\nu}')T\bar{x}$$

$$= \bar{\sigma}'b - \tilde{\mu}'h_{(1)} + \tilde{\nu}'g_{(1)} \cdot$$

Zusammengefaßt definieren $\bar{x},\bar{y},\tilde{u},\tilde{v}$ und $\bar{\sigma},\tilde{\mu},\tilde{\nu}$ optimale komplementäre (Basis-)Lösungen von $(LP)_{(1)}$ und $(LD)_{(1)}$. Daraus folgt dann 4.12.

Wir nehmen nun an, daß $\bar{x}$ nicht optimal für 2.5 ist. Dann gibt es nach Satz 3.7 ein $\hat{s} \in S(\bar{x})$ und $\hat{\delta} < 0$, so daß

4.17 $$(c' + \rho'_{(1)}T)\cdot\hat{s} \leq \hat{\delta} < 0 \qquad 1 \in L(\bar{x}) \ .$$

Aus $\hat{s} \in S(\bar{x})$ folgt, daß es ein $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $\bar{x} + \lambda\cdot\hat{s} \in X_{(1)}$ für mindestens ein $1 \in L(\bar{x})$. Aus

$$(c' + \rho'_{(1)}T)(\bar{x} + \lambda\cdot\hat{s}) \leq (c' + \rho'_{(1)}T)\bar{x} + \lambda\cdot\hat{\delta}$$

$$< (c' + \rho'_{(1)}T)\cdot\bar{x}$$

ergibt sich dann ein Widerspruch zu 4.12. □

4.18 Bemerkung:

Die Bedingungen 4.10 und 4.11 sind nur hinreichend für die Optimalität von $\bar{x}$ in 2.5, im allgemeinen sind sie jedoch nicht notwendig. Dies liegt in der Einschränkung auf komplementäre Basislösungen. Ist $\bar{x} \in X_{(\bar{1})}$ optimale Lösung von 2.5, so gibt es stets eine optimale Lösung von $(LD)_{(\bar{1})}$, so daß 4.10 und 4.11 erfüllt sind.

Hier sollen die Optimalitätsbedingungen jedoch nur für die vom Simplexverfahren gelieferte komplementäre Basislösung von $(LD)_{(\bar{1})}$ formuliert werden.

Im folgenden wird gezeigt, daß 4.10 und 4.11 auch notwendig sind, wenn die zu $\bar{x},\bar{y},\bar{u},\bar{v}$ komplementäre Basislösung eindeutig bestimmt ist.

Wir nehmen an, daß für mindestens ein $i \in \{1,2,\ldots,\bar{m}\}$ 4.10 oder 4.11 nicht erfüllt ist. Aus $g_{(\bar{l})} < h_{(\bar{l})}$ folgt, daß für festes $i \in \{1,2,\ldots,\bar{m}\}$ höchstens eine der Ungleichungen 4.10 bzw. 4.11 verletzt sein kann (denn mindestens eine Slackvariable u_i oder v_i ist dann echt größer als Null und somit Basisvariable).

Die Definition von $\hat{l}_i$ durch

4.19
$$\hat{l}_i = \begin{cases} \bar{l}_i & \text{falls für i 4.10 und 4.11 erfüllt sind} \\ \bar{l}_i + 1 & \text{falls für i 4.10 nicht erfüllt ist} \\ \bar{l}_i - 1 & \text{falls für i 4.11 nicht erfüllt ist} \end{cases}$$

ist also eindeutig. Nach den getroffenen Vereinbarungen für $\bar{l}_i \in \{0,r_i\}$ ist $\hat{l} = (\hat{l}_1,\ldots,\hat{l}_{\bar{m}}) \in L$ und erzeugt damit ein Paar zueinander dualer linearer Programme (LP)$\hat{}_{(1)}$ und (LD)$\hat{}_{(1)}$, $\bar{x} \in X\hat{}_{(1)}$ (Korollar 4.6) und $\hat{l} \in L(\bar{x})$.

Wir werden unter der schwachen zusätzlichen Voraussetzung der Nichtentartung zeigen, daß $X\hat{}_{(1)}$ in $\bar{x}$ eine "zulässige Abstiegsrichtung" von Φ enthält. Eine Basislösung heißt entartet, wenn mindestens eine Basisvariable gleich Null ist (vgl. DANTZIG (1966), VOGEL (1967)).

4.20 Satz:

Sei $(\bar{x}',\bar{y}',\bar{u}',\bar{v}')'$ und $(\bar{o}',\bar{\mu}',\bar{\nu}')'$ wie in Satz 4.9 (2) und sei $\hat{l} = (\hat{l}_1,\ldots,\hat{l}_{\bar{m}})$ nach 4.19 mit $\hat{l} \neq \bar{l}$.

Ist $(\bar{x}',\bar{y}',\bar{u}',\bar{v}')'$ nichtentartete Basislösung von (LP)$_{(\bar{l})}$,

so gilt

4.21 $$\Phi(\bar{x}) > \inf\{\Phi(x) \mid x \in X_{(\hat{l})}\} \geq \inf\{\Phi(x) \mid x \in X\} .$$

Beweis: Entscheidend in 4.21 ist die erste (strikte) Ungleichung. Die zweite Ungleichung ist trivial. Für $\hat{l} \in L(\bar{x})$ sei $(\bar{x}',\bar{y}',\hat{u}',\hat{v}')'$ und $(\bar{\sigma}',\hat{\mu}',\hat{\nu}')'$ die komplementären Basislösungen von $(LP)_{(\hat{l})}$ und $(LD)_{(\hat{l})}$ wie im Beweis von Satz 4.9 Teil (2). Aus $\hat{l} \neq \bar{l}$ folgt $\hat{\mu}_i < 0$ oder $\hat{\nu}_i < 0$ für mindestens ein $i \in \{1,2,\ldots,\bar{m}\}$. Also ist $\bar{x},\bar{y},\hat{u},\hat{v}$ nicht optimal, falls nicht Entartung auftritt ("Simplexkriterium", vgl. DANTZIG (1966)). Aus der Nichtentartung von $\bar{x},\bar{y},\bar{u},\bar{v}$ folgt aber nach Konstruktion die Nichtentartung von $\bar{x},\bar{y},\hat{u},\hat{v}$ und damit

$$\Phi(\bar{x}) = [c' + \rho'_{(\hat{l})} T]\cdot\bar{x} + \gamma_{(\hat{l})} > \inf\{\Phi(x) \mid x \in X_{(\hat{l})}\}$$

und somit 4.21.

□

Mit dem Übergang von $\bar{l}$ auf $\hat{l}$ ist ein "Schritt" des Lösungsverfahrens für 2.5 beschrieben.

4.22 Subgradientenverfahren:

Step 0 (Initialisierung) Bestimme $\bar{l} \in L$ mit $X_{(\bar{l})} \neq \emptyset$

Step 1 Erzeuge $(LP)_{(\bar{l})}$ und löse $(LP)_{(\bar{l})}$ mit einer Standardversion des revidierten Simplexverfahrens. Falls $(LD)_{(\bar{l})}$ unzulässig ist: STOP, sonst

Step 2 Bestimme $\hat{l}$ gemäß 4.19.
Falls $\hat{l} = \bar{l}$, STOP, sonst setze $\bar{l} := \hat{l}$ und wiederhole Step 1.

Sind alle Basislösungen, die im Verlauf des Verfahrens auftreten, nicht entartet, so folgt aus der Endlichkeit von L, daß das Verfahren nach endlich vielen Schritten stoppt.
Ist eine der auftretenden Basislösungen entartet, so wird beim Übergang von $\bar{l}$ auf $\hat{l}$ nicht mehr notwendig der Zielfunktionswert echt verkleinert (vgl. 4.21). Daher ist es theoretisch möglich, daß das Verfahren periodisch zum selben linearen Programm $(LP)_{(l)}$ für ein gewisses $l \in L$ zurückkehrt.
Bei den mit diesem Verfahren gelösten Testproblemen trat dieser Fall jedoch nicht auf, so daß anzunehmen ist, daß, ähnlich wie in der angewandten linearen Programmierung, bei praktischen, d.h. nicht speziell konstruierten Problemen, dieser Fall eine untergeordnete Rolle spielt.
Bezeichnen wir die linearen Programme $(LP)_{(l)}$ für $l \in L$ als "Ersatzprobleme" für 2.5, so erzeugt das in 4.22 angegebene Verfahren eine (endliche) Folge von Ersatzproblemen, so daß sich eine Lösung von 2.5 schließlich direkt aus der Lösung eines Ersatzproblems ergibt oder 2.5 als nicht lösbar erkannt wird.
Hat nun die Matrix T eine spezielle Gestalt, z.B. "Blockdiagonalgestalt", d.h.

4.23
$$T = \begin{bmatrix} T^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T^{(x)} \end{bmatrix}$$

mit $(m_k \times n_k)$-Matrizen $T^{(k)}$, $k = 1,2,\ldots,x$ auf der "Diagonalen", so ergibt sich für die linearen Ersatzprogramme $(LP)_{(l)}$, $l \in L$, wie man sich leicht überlegt, eine "spezielle Struktur", für die effektivere Lösungsverfahren auf der Basis des Simplexverfahrens bekannt sind und die zur Lösung von $(LP)_{(l)}$ benutzt werden können. Beachte, daß hier die "Modifikationen" zur Verbesserung eines Verfahrens für das zweistufige

stochastische Programm benutzt werden, während die in §1, §2 genannten Verfahren zur Lösung des zweistufigen stochastischen Programms gerade in der Anwendung solcher "Modifikationen" bestehen.
Sehr häufig motiviert ganz allgemein eine spezielle Struktur des dem zweistufigen stochastischen Ansatz zugrundeliegenden linearen Programms, die Ersatzprobleme durch einen vom revidierten Simplexverfahren verschiedenen Algorithmus zu lösen.
Bei Verwendung von 4.22 lassen sich zum Beispiel zweistufige stochastische Ansätze für "ganzzahlige lineare Programme" (z.B. YUDIN/TSOY (1974)) durch ein Zurückgreifen auf bekannte Verfahren (die dann zur Lösung von $(LP)_{(\bar{1})}$ eingesetzt werden) für derartige Programme (vgl. z.B. VOGEL (1967), ZIONTS (1974)) lösen. Die Forderung der Ganzzahligkeit würde dann als "deterministische Nebenbedingung" in die Formulierung von X aufgenommen.
Es bleiben jedoch im Einzelfall stets die Bedingungen 4.10 und 4.11 neu zu formulieren und die Aussagen von Satz 4.9 und 4.20 zu verifizieren. Dies wird um so leichter sein, je stärker sich die modifizierten Verfahren zur Lösung von $(LP)_{(\bar{1})}$ an das revidierte Simplexverfahren anlehnen.
In den folgenden beiden Paragraphen werden diese Überlegungen für eine im Hinblick auf Anwendungen wichtige Problemklasse durchgeführt.

§5 Ein stochastisches Flußproblem

In diesem Paragraphen werden als "Ausgangsprobleme" für den zweistufigen stochastischen Ansatz solche linearen Programme zugrunde gelegt, in denen die Entscheidungsvariablen als ein "Fluß" durch ein "Netzwerk" betrachtet werden können.

Zur Formulierung werden folgende Definitionen und Bezeichnungsweisen benötigt (vgl z.B. BAZARAA/JARVIS (1977), FORD/FULKERSON (1962), VOGEL (1967)).

5.1 Definition:
Ein Netzwerk ist ein endlicher gerichteter Graph, d.h.

$$G = (N, A, I) ,$$

bestehend aus endlichen Mengen N und A sowie der Inzidenzabbildung

$$I = (I^1, I^2): A \to N \times N .$$

Die Elemente von N heißen Punkte, die Elemente von A heißen Kanten von G.
Die Inzidenzabbildung I ordnet jeder Kante $a \in A$ den Anfangspunkt $I^1(a)$ und den Endpunkt $I^2(a)$ zu. Eine Kante $a \in A$ mit $I^1(a) = I^2(a)$ heißt Schlinge.
Ein Weg W_{ij} von i nach j, $i,j \in N$ ist eine Kantenfolge

5.2 $$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r , \quad r \in \mathbb{N}$$

aus verschiedenen Kanten, so daß eine Punktfolge

5.3 $$i_1, i_2, \ldots, i_r, i_{r+1}$$

mit $i_1 = i$, $i_{r+1} = j$ und $\{i_k, i_{k+1}\} = \{I^1(a_k), I^2(a_k)\}$, $1 \le k \le r$ existiert.
Die Kanten von 5.2 aus

$$W_{ij}^{\oplus} = \{a_k \in \{a_1,\ldots,a_r\} \mid I^1(a_k) = i_k,\ I^2(a_k) = i_{k+1}\}$$

heißen gleichsinnig orientiert, und die Kanten aus

$$W_{ij}^{\ominus} = \{a_k \in \{a_1,\ldots,a_r\} \mid I^1(a_k) = i_{k+1},\ I^2(a_k) = i_k\}$$

heißen gegensinnig orientiert.
Ein Netzwerk heißt zusammenhängend, wenn es für irgendzwei verschiedene Punkte $i,j \in N$ stets einen Weg von i nach j gibt.
Im folgenden sei

5.4 $$G = (N,A,I)$$

ein zusammenhängendes Netzwerk ohne Schlingen.

Für $i \in N$ bezeichne $A^1(i)$ (bzw. $A^2(i)$) die Menge der Kanten mit Anfangspunkt i (bzw. Endpunkt i),

$$A^1(i) = \{a \in A \mid I^1(a) = i\}$$

$$A^2(i) = \{a \in A \mid I^2(a) = i\} .$$

Sei $f: A \to \mathbb{R}_{\oplus}$ eine beliebige Funktion auf A, wir schreiben hier f_a an Stelle von $f(a)$, und sei $d: N \to \mathbb{R}$ ① mit

5.5 $$\sum_{i\in N} d_i = 0 .$$

5.6 Definition:
f heißt d-Fluß, falls

5.7 $$\sum_{a\in A^1(i)} f_a - \sum_{a\in A^2(i)} f_a = d_i \ ,\ i \in N .$$

---

① Hier und im folgenden wird die Bezeichnungsweise stets so gewählt, daß Analogien zum allgemeinen Ansatz offensichtlich sind.

Ein 0-Fluß (d.h. $d \equiv 0$) heißt Zirkulation.

Wird d_i als "Bedarf" einer Ware in $i \in N$ und die Funktion f als "Transportplan" interpretiert, so ist ein d-Fluß ein Transportplan, der in jedem Punkt $i \in N$ den Bedarf exakt befriedigt.
Ein Punkt $i \in N$ mit $d_i > 0$ wird als Quelle ("Warenüberschuß"), ein $i \in N$ mit $d_i < 0$ als Senke ("Warennachfrage") bezeichnet. Punkte mit $d_i = 0$ heißen Zwischenstationen.

Neben der "Bedarfsfunktion" d seien noch Kosten- und Kapazitätsfunktionen auf A gegeben,

5.8 $$c,g,h: A \to \mathbb{R} \quad , \quad 0 \leq g \leq h \; .$$

5.9 Definition:
Das Optimierungsproblem

5.10 $$\sum_{a \in A} c_a \cdot f_a = \text{MIN!}$$

5.11 $$\sum_{a \in A^1(i)} f_a - \sum_{a \in A^2(i)} f_a = d_i \quad , \quad i \in N$$

5.12 $$g_a \leq f_a \leq h_a \quad , \quad a \in A$$

heißt allgemeines deterministisches Flußproblem.

Die Bedingungen 5.11 stellen die "Bedarfsgleichungen" für die Punkte $i \in N$ dar, während 5.12 Kapazitätsrestriktionen für die Kanten formuliert.
Für $d \equiv 0$ nennen wir 5.10 - 5.12 (deterministisches) Zirkulationsproblem.
Durch Modifikation des zugrundeliegenden Netzwerkes läßt sich jedes allgemeine deterministische Flußproblem als ein Zirkulationsproblem schreiben. 5.10 - 5.12 ist ein lineares Programm (vgl. hierzu z.B. FORD/FULKERSON (1962)).

Nimmt man nun den "Bedarf" d_i, $i \in N$ nicht als Konstanten, sondern als zufällige Größen mit bekannter Verteilung an, so ergibt sich die Ausgangssituation für den zweistufigen stochastischen Ansatz.
Dieses Modell enthält als Spezialfall die stochastischen Transportprobleme, wie sie in WILSON (1972),(1975), WILLIAMS (1963), SZWARC (1964), behandelt werden, stellt aber gegenüber diesen eine echte Verallgemeinerung dar.
Seien $\underset{\sim}{d}_i: (\Omega,\mathfrak{A}) \to (\mathbb{R},\mathfrak{B})$, $i \in N$ zufällige Größen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathfrak{A},P)$, so daß 2.4 gilt. Für eine Funktion $f: A \to \mathbb{R}_{\oplus}$, die wir als Quasifluß (bzw. zulässiger Quasifluß, falls 5.12 erfüllt ist) bezeichnen, kann der Wert

$$T_i^G(f) = \sum_{a \in A^1(i)} f_a - \sum_{a \in A^2(i)} f_a \,, \quad i \in N$$

als der durch f "induzierte" Bedarf im Punkte $i \in N$ betrachtet werden, der mit dem sich dann realisierenden tatsächlichen Bedarf $\underset{\sim}{d}_i(\omega)$, $\omega \in \Omega$ verglichen werden muß.
Lineare Strafkosten $q^+, q^-: N \to \mathbb{R}$ mit

5.13 $$q_i^+ + q_i^- > 0$$

führen auf die Kompensationskosten

5.14 $$\varphi_i(f,\underset{\sim}{d}_i(\omega)) = \begin{cases} -q_i^- \cdot (\underset{\sim}{d}_i(\omega) - T_i^G(f)) & \text{falls } \underset{\sim}{d}_i(\omega) \leq T_i^G(f) \\ q_i^+ \cdot (\underset{\sim}{d}_i(\omega) - T_i^G(f)) & \text{falls } \underset{\sim}{d}_i(\omega) > T_i^G(f) \end{cases}$$

und mit

5.15 $$\Phi_i(f) = \int_{\Omega} \varphi_i(f,\underset{\sim}{d}_i(\omega)) P(d\omega)$$

zur

5.16 Definition:
Das Optimierungsproblem

5.17 $$\sum_{a\in A} c_a f_a + \sum_{i\in N} \Phi_i(f) = \text{MIN!}$$

5.18 $$g_a \le f_a \le h_a \ , \ a \in A$$

heißt allgemeines stochastisches Flußproblem.

Für deterministische Flußprobleme existieren eine Reihe spezieller Lösungsverfahren, die das durch 5.10 - 5.12 gegebene lineare Programm effektiver als das gewöhnliche Simplexverfahren lösen. Diese Verfahren setzen gewöhnlich alle Daten ganzzahlig voraus.
Nimmt man die $\underset{\sim}{d}_i$ diskret verteilt an, so läßt sich 5.17,5.18 als lineares Programm schreiben, aber die Anzahl der Variablen ist erheblich vergrößert. Darüberhinaus hat dieses lineare Programm nicht die Gestalt eines deterministischen Fluß- oder Zirkulationsproblems. Ob sich 5.17, 5.18 überhaupt äquivalent als deterministisches Flußproblem schreiben läßt, ist ungeklärt.
Die in §4 aufgetretenen Ersatzprogramme lassen sich jedoch als Zirkulationsprobleme schreiben, und zwar bezüglich eines gegenüber G leicht modifizierten Netzwerkes.
Sei

5.19 $$d_{i1} < d_{i2} < \ldots < d_{ir_i} \ , \ i \in N, \ r_i \in \mathbb{N}$$

und

5.20 $$P(\underset{\sim}{d}_i = d_{ik}) = p_{ik} > 0 \ , \ \sum_{k=1}^{r_i} p_{ik} = 1 \ .$$

Bestimme dann zunächst d_{io}, $d_{i(r_i+1)}$, $i \in N$, so daß

5.21 $$d_{io} < \min\{d_{i1}, T_i^G(f)\}$$
$$d_{i(r_i+1)} > \max\{d_{ir_i}, T_i^G(f)\}$$

für alle zulässigen Quasiflüsse erfüllt ist.
Mit $p_{io} = p_{i(r_i+1)} = 0$ definiere für

$$l \in L := \{l: N \to \mathbb{N} \cup \{0\} \mid l_i \in \{0,1,2,\ldots,r_i\}\}$$

unter Verwendung von

$$N_{l1} = \{i \in N \mid d_{il_i} > 0\}$$

$$N_{l2} = \{i \in N \mid d_{i(l_i+1)} < 0\}$$

$$N_{l3} = N \setminus (N_{l1} \cup N_{l2})$$

$$\rho^{(l)}: N \to \mathbb{R}, \ \rho_i^{(l)} := -q_i^+ + (q_i^+ + q_i^-)\cdot(\sum_{k=1}^{l_i} p_{ik})$$

ein Netzwerk

$$G_{(l)} = (\tilde{N}, A_{(l)}, I_{(l)})$$

mit

$$\tilde{N} = N \cup \{s,t\}, \ s,t \notin N$$

$$A_{(l)} = A \cup \{(s,t)\} \cup \{(t,i) \mid i \in N_{l1} \cup N_{l3}\} \cup \{(i,s) \mid i \in N_{l2} \cup N_{l3}\}$$

und die Inzidenzabbildung wird nicht explizit angegeben, da sie auf Kanten des Netzwerkes (N,A,I) mit I identifiziert werden kann, und die zusätzlichen Kanten eindeutig durch Anfangs- und Endpunkt beschrieben sind.
Durch

5.22
$$c_a^{(l)} = \begin{cases} c_a + \rho_i^{(l)} - \rho_j^{(l)} & \text{für } a \in A, \ I(a) = (i,j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g^{(1)}_a = g_a \quad , \quad h^{(1)}_a = h_a \qquad a \in A$$

$$g^{(1)}_{(s,t)} = 0 \quad , \quad h^{(1)}_{(s,t)} = \sum_{i\in N} \max\{|d_{io}|, |d_{i(r_i+1)}|\}$$

$$g^{(1)}_{(t,i)} = d_{il_i} \quad , \quad h^{(1)}_{(t,i)} = d_{i(l_i+1)} \qquad i \in N_{11}$$

5.23

$$g^{(1)}_{(i,s)} = -d_{i(l_i+1)} \quad , \quad h^{(1)}_{(i,s)} = -d_{il_i} \qquad i \in N_{12}$$

$$g^{(1)}_{(t,i)} = 0 \quad , \quad h^{(1)}_{(t,i)} = d_{i(l_i+1)} \qquad i \in N_{13}$$

$$g^{(1)}_{(i,s)} = 0 \quad , \quad h^{(1)}_{(i,s)} = -d_{il_i} \qquad i \in N_{13}$$

sind auf den Kanten von $G_{(1)}$ Kosten, Mindest- und Höchstkapazitäten definiert.
Für das deterministische Zirkulationsproblem

$$\sum_{a\in A} c^{(1)}_a \cdot z_a = \text{MIN!}$$

$$(ZP)_{(1)} \qquad T^G_i{}_{(1)}(z) = 0 \quad , \quad i \in N \cup \{s,t\}$$

$$g^{(1)}_a \le z_a \le h^{(1)}_a \quad , \quad a \in A_{(1)}$$

gilt dann

5.24 Lemma:
Zu jedem zulässigen Quasifluß f in 5.17, 5.18 mit

5.25 $$d_{il_i} \le T^G_i(f) \le d_{i(l_{i+1})} \quad , \quad i \in N$$

gibt es eine zulässige Zirkulation z in $(ZP)_{(1)}$ mit

5.26 $$\sum_{a\in A} c^{(1)}_a z_a = \sum_{a\in A} c_a f_a + \sum_{i\in N} \Phi_i(f) - \gamma_{(1)}$$

für eine von f und z unabhängige Konstante $\gamma_{(1)}$. Umgekehrt gibt es zu jeder zulässigen Zirkulation in $(ZP)_{(1)}$ einen zulässigen Quasifluß f in 5.17, 5.18, so daß 5.25 und 5.26 erfüllt ist.

Beweis: Wir werden den Beweis nur in den Grundgedanken führen. Sei $f: A \to \mathbb{R}$ ein zulässiger Quasifluß, so daß 5.25 erfüllt ist. Definiere $z: A_{(1)} \to \mathbb{R}$ durch

5.27
$$
\begin{aligned}
z_a &:= f_a && , a \in A \\
z_{(s,t)} &= \sum_{i \in N_{11}} T_i^G(f) + \sum_{i \in N_{13}} \max\{0, T_i^G(f)\} && \\
z_{(t,i)} &= T_i^G(f) && , i \in N_{11} \\
z_{(i,s)} &= -T_i^G(f) && , i \in N_{12} \\
z_{(t,i)} &= \max\{0, T_i^G(f)\} \\
z_{(i,s)} &= \max\{0, -T_i^G(f)\} && \Big\} \quad i \in N_{13} \quad .
\end{aligned}
$$

Man rechnet dann leicht nach, daß das so definierte z eine zulässige Zirkulation in $(ZP)_{(1)}$ ist. (Zum Nachweis der Zulässigkeit benutze 5.25, zum Nachweis der "Zirkulationsgleichungen" benutze, daß für jeden (zulässigen) Quasifluß $f: A \to \mathbb{R}$, $\sum_{i \in N} T_i^G(f) = 0$ gilt.) Der Beweis von 5.26 verläuft analog zum Beweis von Lemma 4.2. Sei umgekehrt z eine zulässige Zirkulation in $(ZP)_{(1)}$, dann erfüllt der zulässige Quasifluß

5.28
$$f = z/_A \quad \text{(d.h. } f_a = z_a \text{ , } a \in A\text{)}$$

die Bedingungen 5.25 und 5.26.

□

Das Lemma 5.24 stellt das Analogon zu Lemma 4.2 dar.

5.29 Bemerkung:
Wir bezeichnen das durch 5.27 definierte z als die durch f induzierte Zirkulation und das durch 5.28 definierte f als den durch z induzierten Quasifluß.

Zum Abschluß skizzieren wir ein Lösungsverfahren für Zirkulationsprobleme, das wir dann zur Lösung von $(ZP)_{(1)}$ benutzen werden. Um die Schreibweise zu vereinfachen, formulieren wir das Verfahren für ein Zirkulationsproblem bezüglich des Netzwerkes $G = (N,A,I)$ (und nicht bezüglich $G_{(1)}$).

Für

$$\sum_{a\in A} c_a \cdot z_a = \text{MIN!}$$

5.30
$$T_i^G(z) = 0 \qquad , i \in N$$

$$g_a \le z_a \le h_a \qquad , a \in A$$

setzen wir alle Daten als ganzzahlig voraus, also $c_a, g_a, h_a \in \mathbb{Z}$, $a \in A$. Das Verfahren liefert dann eine ganzzahlige optimale Lösung.
Darüberhinaus beschränken wir uns auf den Fall, daß eine zulässige Zirkulation z^o mit $z_a^o \in \mathbb{Z}$, $a \in A$ bekannt ist.
Eine allgemeinere Version des Verfahrens findet man z.B. in BAZARAA/JARVIS (1977), FORD/FULKERSON (1962). Dort ist auch der Endlichkeitsbeweis für das Verfahren zu finden.
Fassen wir 5.30 als lineares Programm auf, so ist das dazu duale Programm gegeben durch

$$\sum_{a\in A} \alpha_a \cdot g_a - \sum_{a\in A} \beta_a \cdot h_a = \text{MAX!}$$

5.31
$$\pi_i - \pi_j + \alpha_a - \beta_a = c_a \quad , a \in A \ , I(a) = (i,j)$$

$$\alpha_a, \beta_a \ge 0 \quad , a \in A$$

Sei $\pi: N \to \mathbb{Z}$, $z: A \to \mathbb{Z}$ mit $g_a \le z_a \le h_a$, $a \in A$.

5.32 Definition:

Eine Kante $a \in A$ heißt bezüglich (z,π) in-kilter[①], falls für

$$\alpha_a = \max\{0, c_a - \pi_i + \pi_j\}\ ,\ I(a) = (i,j)$$

$$\beta_a = \max\{0, -(c_a - \pi_i + \pi_j)\},\ I(a) = (i,j)$$

gilt:

5.33 $$\alpha_a > 0 \quad \Rightarrow \quad z_a = g_a$$

5.34 $$\beta_a > 0 \quad \Rightarrow \quad z_a = h_a\ .$$

Andernfalls heißt $a \in A$ out-of-kilter.

Sind alle Kanten bezüglich (z,π) in-kilter, so ist z eine optimale Lösung von 5.30.

5.35 Das Out-of-kilter Verfahren:

Das Verfahren erzeugt, ausgehend von einer zulässigen Zirkulation $z^0: A \to \mathbb{Z}$ und dualen Größen $\pi^0: N \to \mathbb{Z}$, eine (endliche) Folge

$$(z^\tau, \pi^\tau)_{0 \le \tau \le \bar{\tau}}\ ,$$

so daß schließlich alle Kanten bezüglich $(z^{\bar{\tau}}, \pi^{\bar{\tau}})$ in-kilter sind. Wir skizzieren den Übergang von τ auf $\tau + 1$.

Sei $a_0 \in A$ bezüglich (z^τ, π^τ) out-of-kilter und α^τ, β^τ die durch π^τ bestimmten Größen.

---

① Wir übernehmen die englische Bezeichnung.

5.36 Markierungsphase:

Sei $a_o = (i_o, j_o)$ (bzw. $a_o = (j_o, i_o)$), falls 5.33 (bzw. 5.34) nicht erfüllt ist.

Ein Punkt $i \in N$, $i \neq i_o$ heißt von i_o aus erreichbar, wenn es einen Weg $W_{i_o,i}$ von i_o nach i gibt, so daß für die den Weg definierende Kantenfolge

$$a_1, a_2, \ldots, a_r$$

gilt (vgl Def. 5.1)

5.37 $$a_k \in W^{\oplus}_{i_o,i} \Rightarrow \alpha^{\tau}_{a_k} = 0 \ , \ \Delta_k := h_{a_k} - z^{\tau}_{a_k} > 0$$

5.38 $$a_k \in W^{\ominus}_{i_o,i} \Rightarrow \beta^{\tau}_{a_k} = 0 \ , \ \Delta_k := z^{\tau}_{a_k} - g_{a_k} > 0 \ .$$

i_o heißt ebenfalls von i_o aus erreichbar.

Bezeichne U die Menge der von i_o aus erreichbaren Punkte und $V = N \setminus U$.

5.39 Primale Phase: $j_o \in U$

Sei $W_{i_o,j_o} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ ein Weg von i_o nach j_o.

$$\Delta_{\oplus} = \min\{\Delta_k \mid a_k \in W^{\oplus}_{i_o,j_o}\}$$

$$\Delta_{\ominus} = \min\{\Delta_k \mid a_k \in W^{\ominus}_{i_o,j_o}\}$$

$$\Delta_o = \begin{cases} z^{\tau}_{a_o} - g_{a_o} & \text{falls } a_o = (i_o, j_o) \\ h_{a_o} - z^{\tau}_{a_o} & \text{falls } a_o = (j_o, i_o) \end{cases}$$

$$\Delta^* = \min\{\Delta_{\oplus}, \Delta_{\ominus}, \Delta_o\} \ .$$

Setze dann $\pi^{\tau+1} = \pi^{\tau}$ und

5.40
$$z_a^{\tau+1} = \begin{cases} z_a^{\tau} & \text{falls } a \notin \{a_o, a_1, \ldots, a_r\} \\ z_a^{\tau} + \Delta^* & \text{falls } a \in W^{\oplus}_{i_o,j_o} \text{ oder } a = a_o = (j_o, i_o) \\ z_a^{\tau} - \Delta^* & \text{falls } a \in W^{\ominus}_{i_o,j_o} \text{ oder } a = a_o = (i_o, j_o) \end{cases}$$

5.41 Duale Phase: $j_o \in V$

Sei $(U,V) := \{a \in A \mid I^1(a) \in U,\ I^2(a) \in V\}$ und analog (V,U).

$$\Theta_1 = \min\{\alpha_a^{\tau} \mid \alpha_a^{\tau} > 0,\ a \in (U,V)\}$$

$$\Theta_2 = \min\{\beta_a^{\tau} \mid \beta_a^{\tau} > 0,\ a \in (V,U)\}$$

$$\Theta^* = \min\{\Theta_1, \Theta_2\} .$$

Setze dann $z^{\tau+1} = z^{\tau}$ und

$$\pi_i^{\tau+1} = \begin{cases} \pi_i^{\tau} + \Theta^* & \text{für } i \in U \\ \pi_i^{\tau} & \text{für } i \in V \end{cases}$$

Es wird vereinbart, daß für die Markierungsphase solange dieselbe Kante benutzt wird, bis diese in-kilter ist.

Das Verfahren ist so angelegt, daß für den Übergang von τ nach $\tau+1$ gilt

$a \in A$ ist bzgl. (z^{τ}, π^{τ}) in-kilter

$\Rightarrow$ a ist bzgl. $(z^{\tau+1}, \pi^{\tau+1})$ in-kilter .

5.42 Bemerkung:

Alternativ zur Markierungsphase 5.36 ließen sich (mit den Bezeichnungen wie oben) Mengen U' und V' auch durch

$$V' = \{j_o\} \cup \{j \in N \mid \text{Es gibt einen Weg von } j \text{ nach } j_o, \text{ so daß für die den Weg definierende Kantenfolge 5.37, 5.38 erfüllt ist}\}$$

$$U' = N \setminus V'$$

Die primale Phase kommt dann bei $i_o \in V'$ und die duale Phase bei $i_o \in U'$ zur Anwendung. Die primale/duale Phase selbst würde mit U', V' an Stelle von U, V durchgeführt.

Im folgenden Paragraphen geben wir ein Subgradientenverfahren für stochastische Flußprobleme an, bei dem zur Lösung von $(ZP)_{(1)}$ das Out-of-kilter Verfahren benutzt wird.

§6 Ein Lösungsverfahren für das stochastische Flußproblem bei Verwendung des Out-of-kilter Verfahrens

Für die Realisationen von $\underset{\sim}{d}_i$ (vgl. 5.19, 5.20, 5.21) wird zusätzlich

6.1 $$d_{ik} \in \mathbb{Z} \ , \ p_{ik} \in \mathbb{Q} \ , \ 0 \leq k \leq r_i + 1 \ , \ i \in N$$

gefordert. Daneben gilt $c_a, g_a, h_a \in \mathbb{Z}$, $a \in A$. Durch Multiplikation der Koeffizienten der Zielfunktion lassen sich dann die Daten von $(ZP)_{(\bar{l})}$ stets ganzzahlig machen. Das beeinflußt nicht die optimale Zirkulation; die dualen Größen müssen durch eine entsprechende Division angepaßt werden.
Wähle $\bar{l} \in L$, so daß für das zugeordnete Zirkulationsproblem

$$\sum_{a \in A} c_a^{(\bar{l})} \cdot z_a = \text{MIN!}$$

$$(ZP)_{(\bar{l})} \qquad T_i^{G(\bar{l})}(z) = 0 \qquad , \ i \in N \cup \{s,t\}$$

$$g_a^{(\bar{l})} \leq z_a \leq h_a^{(\bar{l})} \qquad , \ a \in A_{(\bar{l})}$$

eine zulässige Zirkulation existiert. Sei $(\bar{z}, \bar{\pi})$ die durch das Out-of-kilter Verfahren bestimmten optimalen Größen, und bezeichne $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ die durch $\bar{\pi}$ bestimmten Größen gemäß Definition 5.32.
Sei

6.2 $$\bar{\mu}_i = \begin{cases} \bar{\beta}(t,i) & \text{für } i \in N_{\bar{l}1} \cup N_{\bar{l}3} \\ \bar{\alpha}(i,s) & \text{für } i \in N_{\bar{l}2} \end{cases}$$

6.3 $$\bar{\nu}_i = \begin{cases} \bar{\alpha}(t,i) & \text{für } i \in N_{\bar{l}1} \\ \bar{\beta}(i,s) & \text{für } i \in N_{\bar{l}2} \cup N_{\bar{l}3} \end{cases}$$

(vgl. §5, Konstruktion von $G_{(\bar{l})}$)

Zum Beweis des folgenden Optimalitätskriteriums (analog Satz 4.9 (2)) benötigen wir die folgende zusätzliche Bedingung

6.4 $$(\exists\, i^* \in N)\colon P(\underset{\sim}{d}_i = 0) = 0 \ .$$

Die Bedeutung dieser Bedingung wird sich beim Beweis zeigen.

6.5 Satz:
Ist 6.4 erfüllt, so folgt aus

6.6 $$\bar{\nu}_i \le (q_i^+ + q_i^-)\cdot p_{i\bar{l}_i} \qquad , i \in N$$

6.7 $$\bar{\mu}_i \le (q_i^+ + q_i^-)\cdot p_{i(\bar{l}_i+1)} \qquad , i \in N$$

daß der durch $\bar{z}$ induzierte Quasifluß $\bar{f}$ eine optimale Lösung von 5.17, 5.18 ist.

Beweis: (Skizze) Wir zeigen zunächst

6.8 $$\bar{\pi}_s = \bar{\pi}_t \ .$$

Aus $\bar{\pi}_t < \bar{\pi}_s$ folgt $\bar{\beta}_{(s,t)} = \max\{0, \bar{\pi}_s - \bar{\pi}_t\} > 0$ und damit ((s,t) ist bezüglich $(\bar{z},\bar{\pi})$ in-kilter) $\bar{z}_{(s,t)} = h^{(\bar{l})}_{(s,t)}$. Aus der Definition von $h^{(\bar{l})}_{(s,t)}$ (vgl. 5.23) folgt ein Widerspruch zu 5.21.

Aus $\bar{\pi}_t > \bar{\pi}_s$ folgt $\bar{\alpha}_{(s,t)} > 0$ und damit $\bar{z}_{(s,t)} = g^{(\bar{l})}_{(s,t)} = 0$ (vgl. 5.23). $\bar{z}$ ist aber eine Zirkulation, daher $\bar{z}_{(i,s)} = \bar{z}_{(t,i)} = 0$ für alle Kanten $(t,i),(i,s) \in A_{(\bar{l})}$ und damit $N = N_{\bar{l}3}$.

Für das $i^* \in N$ aus Bedingung 6.4 gilt dann

$$6.9 \qquad \begin{aligned} \bar{z}_{(i^*,s)} = 0 &\Rightarrow \bar{\pi}_{i^*} \leq \bar{\pi}_s \\ \bar{z}_{(t,i^*)} = 0 &\Rightarrow \bar{\pi}_{i^*} \geq \bar{\pi}_t \end{aligned}$$

und die Implikationen in 6.9 lassen sich für i^* nur ableiten, da 6.4 garantiert, daß $h^{(\bar{l})}_{(i^*,s)} > 0$ und $h^{(\bar{l})}_{(t,i^*)} > 0$. Darin liegt auch die Notwendigkeit von Bedingung 6.4 begründet. Die Zerlegung in eine Kante (t,i) und in eine Kante (i,s) für $i \in N_{\bar{l}3}$ läßt trotz $d_{i\bar{l}_i} < d_{i(\bar{l}_i+1)}$ die Möglichkeit offen, daß in $G_{(\bar{l})}$ für "zusätzliche" Kanten $a \in A_{(\bar{l})}$ (d.h. $a \notin A$) $g_a^{(\bar{l})} = h_a^{(\bar{l})}$ ist. Wegen 6.9 führt $\bar{\pi}_t > \bar{\pi}_s$ auf den Widerspruch $\bar{\pi}_{i^*} < \bar{\pi}_{i^*}$. Auf Grund von 5.19 und 5.20 läßt sich das allgemeine stochastische Flußproblem als lineares Programm schreiben:

$$6.10 \qquad \begin{aligned} &\sum_{a\in A} c_a f_a + \sum_{i\in N} \left(\sum_{k=1}^{r_i} p_{ik}(q_i^+ y_{ik}^+ + q_i^- y_{ik}^-) \right) = \text{MIN!} \\ &T_i^G(f) + y_{ik}^+ - y_{ik}^- = d_{ik} \quad , \; k = 1,2,\ldots,r_i, \; i \in N \\ &g_a \leq f_a \leq h_a \qquad , \; a \in A \\ &y_{ik}^+ \geq 0 \; , \; y_{ik}^- \geq 0 \quad , \; k = 1,2,\ldots,r_i, \; i \in N \; . \end{aligned}$$

Das zu 6.10 duale lineare Programm ist

$$6.11 \qquad \sum_{i\in N} \sum_{k=1}^{r_i} d_{ik}\cdot\sigma_{ik} + \sum_{a\in A} g_a\cdot\alpha_a - \sum_{a\in A} h_a\cdot\beta_a = \text{MAX!}$$

$$6.12 \qquad \sum_{k=1}^{r_i} \sigma_{ik} - \sum_{k=1}^{r_j} \sigma_{jk} + \alpha_a - \beta_a = c_a \ , \ a \in A \ , \ I(a) = (i,j)$$

$$6.13 \qquad -q_i^- p_{ik} \le \sigma_{ik} \le q_i^+ p_{ik} \ , \ k = 1,2,\ldots,r_i, \ i \in N$$

$$6.14 \qquad \alpha_a, \beta_a \ge 0 \ .$$

Der Quasifluß $\bar{f}$ läßt sich dann in natürlicher Weise zu einer zulässigen Lösung von 6.10 erweitern. Für

$$\bar{\sigma}_{ik} = \begin{cases} -q_i^- \cdot p_{ik} & \text{falls } k \le \bar{l}_i - 1 \\ -q_i^- \cdot p_{ik} + \bar{\nu}_i & \text{falls } k = \bar{l}_i \\ q_i^+ \cdot p_{ik} - \bar{\mu}_i & \text{falls } k = \bar{l}_i + 1 \\ q_i^+ \cdot p_{ik} & \text{falls } k \ge \bar{l}_i + 2 \end{cases}$$

folgt dann (unter Verwendung von 6.6 und 6.7) die Ungleichung 6.13. Für (vgl. Definition 5.32)

$$\bar{\alpha}_a = \max\{0, c_a^{(\bar{l})} - \bar{\pi}_{I^1(a)} + \bar{\pi}_{I^2(a)}\} \ , \ a \in A$$

$$\bar{\beta}_a = \max\{0, -(c_a^{(\bar{l})} - \bar{\pi}_{I^1(a)} + \bar{\pi}_{I^2(a)})\} \ , \ a \in A$$

gilt 6.14 und zusammen mit

$$\sum_{k=1}^{r_i} \bar{\sigma}_{ik} = (\bar{\pi}_i - \rho_{i\bar{l}_i}) - \bar{\pi}_t \qquad \forall\, i \in N$$

(hier wurde dann entscheidend 6.8 benutzt) folgt dann 6.12. Man zeigt leicht, daß für $\bar{\sigma}_{ik}$, $\bar{\alpha}_a$, $\bar{\beta}_a$ und die erweiterte Lö-

sung $\bar{f}$, $\bar{y}^+_{ik}$, $\bar{y}^-_{ik}$ die Zielfunktionswerte von Primal- und Dualprogramm gleich sind. Aus dem Dualitätssatz für die lineare Programmierung ergibt sich dann schließlich die Behauptung. □

Wir setzen

$$N_o = \{i \in N \mid \bar{\nu}_i \leq (q_i^+ + q_i^-)p_{i\bar{l}_i},\ \bar{\mu}_i \leq (q_i^+ + q_i^-)p_{i(\bar{l}_i+1)}\}$$

$$N_\oplus = \{i \in N \mid \bar{\mu}_i > (q_i^+ + q_i^-)\cdot p_{i(\bar{l}_i+1)}\}$$

$$N_\ominus = \{i \in N \mid \bar{\nu}_i > (q_i^+ + q_i^-)\cdot p_{i\bar{l}_i}\}.$$

Dann gilt:

6.15 Lemma:
$(N_o, N_\oplus, N_\ominus)$ ist eine Zerlegung von N und für $i \in N$ gilt:

6.16
$$\bar{l}_i = 0 \Rightarrow i \notin N_\ominus$$
$$\bar{l}_i = r_i \Rightarrow i \notin N_\oplus .$$

Beweis: Sei $i \in N$ und $\bar{l}_i = 0$.

$$i \in N_\ominus \Rightarrow \bar{\nu}_i > 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{z}_{(t,i)} = d_{io} & i \in N_{\bar{l}1} \\ \bar{z}_{(i,s)} = -d_{io} & i \in N_{\bar{l}2} \cup N_{\bar{l}3} \end{cases}$$

$\Rightarrow T_i^G(\bar{f}) = d_{io}$ für den durch $\bar{z}$ induzierten Quasifluß $\bar{f}$

$\Rightarrow$ Widerspruch zu 5.21.

Analog folgt für $\bar{l}_i = r_i$ aus $i \in N_\oplus$ ein Widerspruch zu 5.21 und damit 6.16.

Es bleibt $N_\oplus \cap N_\ominus = \emptyset$ zu zeigen.

Sei $i \in N_{\oplus} \cap N_{\ominus}$. Dann folgt für $i \in N_{\bar{l}1} \cup N_{\bar{l}2}$ mit $\bar{\lambda}_i > 0$ und $\bar{\mu}_i > 0$ ein Widerspruch zu $\bar{\alpha}_{(t,i)} \cdot \bar{\beta}_{(t,i)} = 0$ (bzw. $\bar{\alpha}_{(i,s)} \cdot \bar{\beta}_{(i,s)} = 0$). Für $i \in N_{\bar{l}3}$ folgt

$$\bar{\beta}_{(i,s)} > 0 \text{ und } \bar{\beta}_{(t,i)} > 0 \Rightarrow \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_s > 0 \text{ und } \bar{\pi}_t - \bar{\pi}_i > 0$$

$$\Rightarrow \bar{\pi}_s < \bar{\pi}_i < \bar{\pi}_t$$

$\Rightarrow$ Widerspruch zu 6.8. □

Nach Lemma 6.16 ist dann $\hat{l}: N \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit

6.17
$$\hat{l}_i = \begin{cases} \bar{l}_i & i \in N_o \\ \bar{l}_i + 1 & i \in N_{\oplus} \\ \bar{l}_i - 1 & i \in N_{\ominus} \end{cases}$$

wohldefiniert und $\hat{l} \in L$. Somit definiert $\hat{l}$ für $N_{\oplus} \cup N_{\ominus} \neq \emptyset$ ein neues Zirkulationsproblem $(ZP)_{(\hat{l})}$.

Sei $\bar{f}$ der durch $\bar{z}$ induzierte Quasifluß.

6.18 Lemma:

$\bar{f}$ induziert eine zulässige Zirkulation $\hat{z}$ für $(ZP)_{(\hat{l})}$, und es gilt:

6.19
$$z_a = \begin{cases} \bar{z}_a & \text{falls } a \in A_{(\bar{l})} \cap A_{(\hat{l})} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Zunächst gilt für $i \in N$

$$T_i^{G_{(\bar{l})}}(\bar{z}) = \begin{cases} T_i^G(\bar{f}) - \bar{z}_{(t,i)} & \text{für } i \in N_{\bar{l}1} \\ T_i^G(\bar{f}) + \bar{z}_{(i,s)} & \text{für } i \in N_{\bar{l}2} \\ T_i^G(\bar{f}) - \bar{z}_{(t,i)} + \bar{z}_{(i,s)} & \text{für } i \in N_{\bar{l}3} \end{cases}.$$

Für $i \in N_\Theta$ gilt

$$i \in N_{\bar{l}1} \Rightarrow \bar{\alpha}_{(t,i)} > 0 \Rightarrow \bar{z}_{(t,i)} = d_{i\bar{l}_i}$$

$$i \in N_{\bar{l}2} \Rightarrow \bar{\beta}_{(i,s)} > 0 \Rightarrow \bar{z}_{(i,s)} = -d_{i\bar{l}_i}$$

$$i \in N_{\bar{l}3} \Rightarrow \bar{\beta}_{(i,s)} > 0 \underset{6.8}{\Rightarrow} \begin{cases} \bar{z}_{(i,s)} = -d_{i\bar{l}_i} \\ \bar{z}_{(t,i)} = 0 \end{cases}$$

und für $i \in N_\oplus$

$$i \in N_{\bar{l}1} \Rightarrow \bar{\beta}_{(t,i)} > 0 \Rightarrow \bar{z}_{(t,i)} = d_{i(\bar{l}_i+1)}$$

$$i \in N_{\bar{l}2} \Rightarrow \bar{\beta}_{(i,s)} > 0 \Rightarrow \bar{z}_{(i,s)} = -d_{i(\bar{l}_i+1)}$$

$$i \in N_{\bar{l}3} \Rightarrow \bar{\beta}_{(t,i)} > 0 \underset{6.8}{\Rightarrow} \begin{cases} \bar{z}_{(t,i)} = d_{i(\bar{l}_i+1)} \\ \bar{z}_{(i,s)} = 0 \end{cases}$$

Also gilt, da $\bar{z}$ eine zulässige Zirkulation in $(ZP)_{(\bar{l})}$ ist,

$$T_i^G(f) = \begin{cases} d_{i\bar{l}_i} & \text{für } i \in N_\Theta \\ d_{i(\bar{l}_i+1)} & \text{für } i \in N_\oplus \end{cases}$$

d.h. (für $i \in N_o$ ist die Ungleichung trivial)

$$d_{i\hat{l}_i} \leq T_i^G(f) \leq d_{i(\hat{l}_i+1)} \qquad (\forall\, i \in N) .$$

Aus Lemma 5.24 (vgl. auch 5.27) folgt dann die Behauptung. □

Sei $\hat{z}$ die nach Lemma 6.18 bestimmte zulässige Zirkulation für $(ZP)_{(\hat{l})}$.

Für die dualen Größen

6.20
$$\hat{\pi}_i = \begin{cases} \bar{\pi}_i & \text{für } i \in N_o \cup \{t,s\} \\ \bar{\pi}_i + (q_i^+ + q_i^-)p_{i(\bar{l}_i+1)} & \text{für } i \in N_\oplus \\ \bar{\pi}_i - (q_i^+ - q_i^-)p_{i\bar{l}_i} & \text{für } i \in N_\ominus \end{cases}$$

gilt

6.21 Lemma:

(1) $a \in A \cup \{(s,t)\}$ ist bzgl. $(\hat{z},\hat{\pi})$ in-kilter

(2) $a = (t,i)$ und/oder $a = (i,s)$ ist für $i \in N_o$ bzgl. $(\hat{z},\hat{\pi})$ in-kilter

(3) Für $i \in N_\oplus \cup N_\ominus$ ist mindestens eine Kante der Form (t,i) oder (i,s) bzgl. $(\hat{z},\hat{\pi})$ out-of-kilter.

Beweis:

(1) Aus 5.22 und 6.20 folgt

$$\hat{\pi}_{I^1(a)} - \hat{\pi}_{I^2(a)} - c_a^{(\hat{l})} = \bar{\pi}_{I^1(a)} - \bar{\pi}_{I^2(a)} - c_a^{(\bar{l})}, \quad a \in A$$

$$\hat{\pi}_s - \hat{\pi}_t = \bar{\pi}_s - \bar{\pi}_t$$

und damit ergibt sich wegen $\hat{z}\big|_{A\cup\{(s,t)\}} = \bar{z}\big|_{A\cup\{(s,t)\}}$ (vgl. 6.19) die Behauptung.

(2) Für $i \in N_o$ gilt

$$(t,i) \in A_{(\bar{1})} \Leftrightarrow (t,i) \in A_{(\hat{1})}$$

$$(i,s) \in A_{(\bar{1})} \Leftrightarrow (i,s) \in A_{(\bar{1})}$$

und nach 6.17 sind die Mindest- und Höchstkapazitäten unverändert, nach 6.19 ist der Wert der Zirkulation unverändert und mit 6.20 folgt daraus direkt die Behauptung.

(3) Zum Beweis müssen eine Vielzahl von möglichen Fällen diskutiert werden. Wir führen den Beweis exemplarisch für einen Fall und zeigen dabei das allgemeine Prinzip der Beweisführung auf.

Sei $i \in N_\Theta$ und $i \in N_{\bar{1}1} \cap N_{\hat{1}1}$ ($\hat{1}$ erzeugt die Zerlegung $N_{\hat{1}1}$, $N_{\hat{1}2}$, $N_{\hat{1}3}$ der Punktmenge N).

$$i \in N_\Theta \cap N_{\bar{1}1} \Rightarrow \bar{v}_i = \bar{\alpha}_{(t,i)} > (q_i^+ + q_i^-)\cdot p_{i\bar{1}_i}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}_{(t,i)} = \max\{0, \hat{\pi}_i - \hat{\pi}_t\}$$

$$= \max\{0, \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_t - (q_i^+ + q_i^-)p_{i\bar{1}_i}\}$$

$$= \bar{\alpha}_{(t,i)} - (q_i^+ + q_i^-)p_{i\bar{1}_i}$$

$$> 0$$

d.h. für die Kante (t,i) gilt

6.22 $\bar{\alpha}_{(t,i)} > 0$ und $\hat{\alpha}_{(t,i)} > 0$

$$i \in N_{\bar{l}1} \cap N_{\hat{l}1} \Rightarrow (t,i) \in A_{(\bar{l})} \cap A_{(\hat{l})}$$

$$\Rightarrow \hat{z}_{(t,i)} = \bar{z}_{(t,i)}$$

$$\bar{\alpha}_{(t,i)} > 0 \Rightarrow \bar{z}_{(t,i)} = g^{(\bar{l})}_{(t,i)} = d_{i\bar{l}_i} = d_{i(\hat{l}_i+1)} = h^{(\hat{l})}_{(t,i)} > 0$$

d.h. für die Kante (t,i) gilt

6.23 $$\bar{z}_{(t,i)} = g^{(\bar{l})}_{(t,i)} \text{ und } \hat{z}_{(t,i)} = h^{(\hat{l})}_{(t,i)} \neq g^{(\hat{l})}_{(t,i)}$$

6.22 und 6.23 $\Rightarrow$ (t,i) ist bzgl. $(\hat{z},\hat{\pi})$ out-of-kilter. Das allgemeine Prinzip ist also, daß die Definition 6.17 für die hier betrachteten Kanten eine Änderung des Kapazitätsintervalls bewirkt, so daß die aktuelle Zirkulation an die "falsche" Seite dieses Intervalls gerät (siehe 6.23) und somit die Kante out-of-kilter wird, da die $\hat{\pi}$ zugeordneten Größen $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ im Vergleich zu $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ das Vorzeichen nicht ändern (siehe 6.22). Diese Konstruktion ist nur möglich für $i \in N_{\oplus} \cup N_{\ominus}$. □

Für die folgenden Überlegungen ist wichtig zu wissen, wann eine Zirkulationsänderung (gemäß der primalen Phase) eine kostengünstigere Zirkulation erzeugt.

6.24 Lemma:
Gegeben sei das Zirkulationsproblem $(ZP)_{(l)}$ für ein $l \in L$, sowie eine zulässige Zirkulation $\tilde{z}$ und duale Größen $\tilde{\pi}_i$, $i \in N \cup \{t,s\}$, so daß alle Kanten $a \in A \cup \{(s,t)\}$ bzgl. $(\tilde{z},\tilde{\pi})$ in-kilter sind.
Sei $a_o \in A_{(l)}$ bezüglich $(\tilde{z},\tilde{\pi})$ out-of-kilter, und sei z^* die

Zirkulation, die sich nach (der als möglich vorausgesetzten) Durchführung der primalen Phase ergeben hat, wobei a_o zur Markierungsphase benutzt wurde.
Dann gilt:

6.25 $$\sum_{a\in A} c_a^{(1)} \cdot z_a^* < \sum_{a\in A} c_a^{(1)} \cdot \tilde{z}_a \ .$$

Beweis: Der Beweis wird für den Fall $a_o = (t,i_o)$ und $\tilde{\beta}_{(t,i_o)} = \max\{0,(\tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_{i_o})\} > 0$ im Detail geführt.
Die restlichen Fälle lassen sich vollkommen analog behandeln.
Zur Durchführung der primalen Phase wird die Existenz eines Weges $W_{i_o,t}$ von i_o nach t mit Kantenfolge

6.26 $$a_1,a_2,\ldots,a_{r+1}$$

und Punktfolge

6.27 $$i_o,i_1,i_2,\ldots,i_r,t$$

vorausgesetzt, so daß die Bedingungen 5.37 und 5.38 erfüllt sind. Es kann angenommen werden, daß $t \notin \{i_1,i_2,\ldots,i_r\}$.
In 6.26 ist die Kantenfolge

$$(i_o,s),(s,t)$$

ausgeschlossen, denn mit 5.37 würde daraus

$$\tilde{\alpha}_{(i_o,s)} = \tilde{\alpha}_{(s,t)} = 0 \Rightarrow (\tilde{\pi}_s - \tilde{\pi}_{i_o} \leq 0 \text{ und } \tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_s \leq 0)$$

$$\Rightarrow \tilde{\pi}_t \leq \tilde{\pi}_s \leq \tilde{\pi}_{i_o}$$

$$\Rightarrow \tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_{i_o} \leq 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta}_{(t,i_o)} = 0$$

folgen.
Da alle Kanten $a \in A \cup \{(s,t)\}$ bzgl. $(\tilde{z},\tilde{\pi})$ in-kilter sind und $\tilde{z}$ zulässige Zirkulation ist, folgt

$$(\forall\, a \in (A \cup \{(s,t)\}) \cap \{a_1,a_2,\ldots,a_{r+1}\}) \quad \tilde{\alpha}_a = \tilde{\beta}_a = 0$$

und damit

$$c_a^{(1)} = \tilde{\pi}_{I^1(a)} - \tilde{\pi}_{I^2(a)} \qquad a \in A \cap \{a_1,a_2,\ldots,a_{r+1}\} \tag{6.28}$$

$$\tilde{\pi}_t = \tilde{\pi}_s \qquad \text{falls } (s,t) \in \{a_1,\ldots,a_{r+1}\}\ .$$

Nach 5.40 folgt für ein $\Delta > 0$

$$\sum_{a\in A} c_a^{(1)} \cdot (z_a^* - \tilde{z}_a) = \left[\sum_{a\in W^{\oplus}_{i_o,t}\cap A} c_a^{(1)} - \sum_{a\in W^{\ominus}_{i_o,t}\cap A} c_a^{(1)} \right] \cdot \Delta$$

$$=: C^* \cdot \Delta\ .$$

Wir zeigen $C^* < 0$, daraus folgt dann 6.25.

1. Fall: $s \notin \{i_1,i_2,\ldots,i_r\}$

$$6.28 \Rightarrow C^* = (\tilde{\pi}_{i_o} - \tilde{\pi}_{i_1}) + (\tilde{\pi}_{i_1} - \tilde{\pi}_{i_2}) + \ldots + (\tilde{\pi}_{i_{r-1}} - \tilde{\pi}_{i_r})$$

$$= (\tilde{\pi}_{i_o} - \tilde{\pi}_{i_r})$$

$$= (\tilde{\pi}_{i_o} - \tilde{\pi}_t) + (\tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_{i_r})$$

$$\leq (\tilde{\pi}_{i_o} - \tilde{\pi}_t)$$

$$= -\tilde{\beta}(t,i_o)$$

$$< 0\ .$$

Hierbei wurde zum Schluß

$$a_{r+1} = (t,i_r) \in W^{\Theta}_{i_o,t} \underset{5.38}{\Rightarrow} \tilde{\beta}_{(t,i_r)} = \max\{0, \tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_{i_r}\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_{i_r} \leq 0$$

benutzt.

<u>2. Fall:</u> $s = i_r$ (Aus dem zu Beginn gezeigten folgt $r > 1$)

$$6.28 \Rightarrow C^* = (\tilde{\pi}_{i_o} - \tilde{\pi}_{i_1}) + (\tilde{\pi}_{i_1} - \tilde{\pi}_{i_2}) + \ldots + (\tilde{\pi}_{i_{r-2}} - \tilde{\pi}_{i_{r-1}})$$

$$= (\tilde{\pi}_{i_o} - \tilde{\pi}_{i_{r-1}})$$

$$= (\tilde{\pi}_{i_o} - \tilde{\pi}_t) + (\tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_{i_{r-1}})$$

$$\leq (\tilde{\pi}_{i_o} - \tilde{\pi}_t)$$

$$< 0 \ .$$

Hierbei wurde

$$a_r = (i_{r-1},s) \in W^{\Theta}_{i_o,t} \underset{5.37}{\Rightarrow} \tilde{\alpha}_{(i_{r-1},s)} = \max\{0, \tilde{\pi}_s - \tilde{\pi}_{i_{r-1}}\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\pi}_s - \tilde{\pi}_{i_{r-1}} \leq 0$$

benutzt.

<u>3. Fall:</u> $s = i_k \in \{i_1,\ldots,i_{r-1}\}$

$$6.28 \Rightarrow C^* = (\tilde{\pi}_{i_o} - \tilde{\pi}_{i_1}) + \ldots + (\tilde{\pi}_{i_{(k-2)}} - \tilde{\pi}_{i_{(k-1)}}) +$$

$$+ (\tilde{\pi}_{i_{(k+1)}} - \tilde{\pi}_{i_{(k+2)}}) + \ldots + (\tilde{\pi}_{i_{(r-1)}} - \tilde{\pi}_{i_r})$$

$$= (\tilde{\pi}_{i_o} - \tilde{\pi}_{i_{(k-1)}}) + (\tilde{\pi}_{i_{(k+1)}} - \tilde{\pi}_{i_r})$$

$$= (\tilde{\pi}_{i_o} - \tilde{\pi}_{i_r}) + (\tilde{\pi}_{i_{(k+1)}} - \tilde{\pi}_s) + (\tilde{\pi}_s - \tilde{\pi}_{i_{(k-1)}})$$

$$\leq (\tilde{\pi}_{i_o} - \tilde{\pi}_{i_r})$$

$$< 0 .$$

Hierbei wurde

$$a_k = (i_{(k-1)},s) \in W^{\Theta}_{i_o,t} \underset{5.38}{\Rightarrow} \tilde{\pi}_s - \tilde{\pi}_{i_{(k-1)}} \leq 0$$

und

$$a_{k+1} = (i_{(k+1)},s) \in W^{\Theta}_{i_o,t} \underset{5.37}{\Rightarrow} \tilde{\pi}_{i_{(k+1)}} - \tilde{\pi}_s \leq 0$$

benutzt.
Die Beweise für

$$a_o = (t,i_o) \text{ und } \tilde{\alpha}_{(t,i_o)} > 0$$

und

$$a_o = (i_o,s) \text{ und } (\tilde{\alpha}_{(i_o,s)} > 0 \text{ bzw. } \tilde{\beta}_{(i_o,s)} > 0)$$

verlaufen dann analog.

□

Sei $\hat{z}^*$ die optimale Zirkulation für (ZP)$_{\hat{(1)}}$, die das Out-of-kilter Verfahren liefert, falls mit $(\hat{z},\hat{\pi})$ gemäß 6.19, 6.20 gestartet wird.

6.29 Satz:
Aus $\hat{z}^* \neq z$ folgt

6.30 $$\sum_{a\in A} c_a^{(1)} \cdot \hat{z}_a^* < \sum_{a\in A} c_a^{(1)} \cdot \hat{z}_a$$

und der durch $\hat{z}$ induzierte Quasifluß $\bar{f}$ ist nicht optimal in 5.10 - 5.12.

Beweis: $\hat{z}^*$ ergibt sich aus $\hat{z}$ durch mehrmalige Durchführung der primalen Phase. Aus Lemma 6.18 und Lemma 6.21 folgt, daß bei der ersten Durchführung die Voraussetzungen von Lemma 6.24 bezüglich $(\hat{z},\hat{\pi})$ erfüllt sind. In-kilter Kanten bleiben aber beim Out-of-kilter Verfahren in-kilter, so daß Lemma 6.24 auch auf jede weitere Durchführung der primalen Phase anwendbar bleibt. Daraus folgt 6.30.
Aus Lemma 5.24 und 6.30 folgt dann für die durch $\hat{z}^*$ bzw. $\hat{z}$ induzierten Quasiflüsse $\hat{f}^*$ bzw. $\hat{f} = \bar{f}$.

$$\begin{aligned}\sum_{a\in A} c_a\cdot\hat{f}_a^* + \sum_{i\in N}\Phi_i(\hat{f}^*) &= \sum_{a\in A} c_a^{(\hat{1})}\cdot\hat{z}_a^* + \gamma_{(\hat{1})}\\ &< \sum_{a\in A} c_a^{(\hat{1})}\cdot\hat{z}_a + \gamma_{(\hat{1})}\\ &= \sum_{a\in A} c_a\cdot\hat{f}_a + \sum_{i\in N}\Phi_i(\hat{f})\end{aligned}$$

und damit die Nichtoptimalität von $\hat{f} = \bar{f}$ im stochastischen Flußproblem 5.17, 5.18.

□

Im Fall $\hat{z}^* \neq \hat{z}$ ergibt also der Übergang von $\bar{1}$ auf $\hat{1}$ gemäß 6.17 eine echte Verbesserung für die induzierten Quasiflüsse.

Auch hier ist dann durch den Übergang von $\bar{1}$ auf $\hat{1}$ ein Schritt des Lösungsverfahrens für 5.17, 5.18 beschrieben. Eine zu 4.22 analoge Beschreibung für das Verfahren ist offensichtlich. Tritt dabei bei jedem Übergang eine Zirkulationsänderung ein, so liefert das Verfahren in endlich vielen Schritten eine Lösung.
Wir betrachten jetzt den Fall, daß $\hat{z}^* = \hat{z}$ ist. Dieser Fall ist mit dem Entartungsfall beim allgemeinen Ansatz vergleichbar. Die dem Out-of-kilter Verfahren zugrundeliegende Idee erlaubt nun auch für diesen Fall, das weitere Vorgehen explizit zu beschreiben. Durch Modifikation der dualen Phase des

Out-of-kilter Verfahrens läßt sich, falls eine Verbesserung überhaupt möglich ist, diese als Zirkulationsänderung in einem neuen Graphen realisieren. Wir werden die dazu notwendigen Überlegungen jedoch nicht im Detail ausführen, hauptsächlich deshalb nicht, da auch für stochastische Flußprobleme ein periodisches Zurückkehren zum selben Ersatzproblem bei nicht speziell konstruierten Beispielen scheinbar nicht auftritt. Zum Austesten wurde eine Standardversion benutzt, und in allen Testbeispielen liefert das Verfahren auch hier in endlich vielen Schritten einen optimalen Quasifluß. Es ist auch nicht gelungen, ein Beispiel zu konstruieren, für das dies nicht gilt.
Wir werden uns deshalb darauf beschränken, die der Modifikation zugrundeliegende Idee aufzuzeigen.
Startet man das Out-of-kilter Verfahren für (ZP) $\overset{(1)}{\hat{}}$ mit den Startwerten $(\hat{z},\hat{\pi})$, so liefert es die optimalen Größen $(\hat{z}^*,\hat{\pi}^*)$ ohne Durchführung der primalen Phase. Dabei ist es möglich, daß die Änderung der dualen Größen für ein $i \in N_o$ eine Änderung der abgeleiteten Größen μ_i, ν_i zur Folge hat. Es ist daher möglich, daß für ein $i \in N_o$ die "Optimalitätsbedingungen" 6.6 und 6.7 nach Durchführung der dualen Phase nicht mehr erfüllt sind. Bei Verwendung der modifizierten dualen Phase wird das dadurch verhindert, daß die Bestimmung von θ^* in der dualen Phase durch zusätzliche Bedingungen weiter eingeschränkt wird. (In 5.41 gilt $\theta^* = \min\{\theta_1,\theta_2\}$, jetzt würde man $\theta^* = \min\{\theta_1,\theta_2,\theta_o\}$ für geeignet gewähltes θ_o erhalten.)

Man kann dann zeigen, daß der durch $\hat{z}$ induzierte Quasifluß genau dann eine optimale Lösung des stochastischen Flußproblems ist, wenn bei keiner Durchführung der modifizierten Phase die zusätzlichen Bedingungen zum Tragen kommen.

6.31 Bemerkung:
Der hier für stochastische Flußprobleme vorgeschlagene Lö-

sungsansatz läßt sich auch auf "stochastische Zuordnungsprobleme", wie sie in MILDER/WOLLMER (1969), ELMAGHRABY (1960) betrachtet werden, übertragen. Dazu müssen die "Ersatzprobleme" als allgemeine Zuordnungsprobleme formuliert werden, so daß die für diese Probleme entwickelten Lösungsverfahren (z.B. FORD/FULKERSON) angewendet werden können. Für geeignet gewählte "duale Größen" lassen sich dann die Aussagen von Satz 6.5 und 6.29 ableiten.

Im folgenden Paragraphen wird das Konzept auf spezielle absolut-stetige Verteilungen angewandt.

§7 Ein Gradientenverfahren für stückweise gleichverteilte Zufallsvariablen

Sind beim zweistufigen stochastischen Ansatz die $\underset{\sim}{d}_i$, $1 \le i \le \bar{m}$, gleichverteilte zufällige Größen, so läßt sich 2.5 äquivalent als ein quadratisches Programm formulieren (vgl. KALL (1976)).

7.1 Definition:
Die zufällige Größe $\underset{\sim}{d}_i$ heißt auf dem Intervall $[d_{i1}, d_{i2}]$, $d_{i1} < d_{i2}$ gleichverteilt, falls für die Verteilungsfunktion F_i gilt:

$$F_i(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad \lambda_i < d_{i1} \\ \dfrac{1}{(d_{i2} - d_{i1})} \cdot (\lambda_i - d_{i1}) & \text{falls} \quad d_{i1} \le \lambda_i \le d_{i2} \\ 1 & \text{falls} \quad \lambda_i > d_{i2} \end{cases}$$

7.2 Definition:

(1) Eine $(n \times n)$-Matrix D heißt symmetrisch, falls $D' = D$ ist, und positiv semidefinit, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ $x' \cdot D \cdot x \ge 0$ ist.

(2) Sei D eine symmetrische, positiv semidefinite $(n \times n)$-Matrix, $c \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ und $\tilde{A}$ eine $(\tilde{m} \times n)$-Matrix. Das Optimierungsproblem

$$c' \cdot x + \frac{1}{2} x' \cdot D \cdot x = \text{MIN!}$$

7.3

$$\text{bzgl. } \tilde{A}x \ge \tilde{b}\,, \quad x \ge 0$$

heißt quadratisches Programm.

Für eine beliebige $(n \times n)$-Matrix D ist die Zielfunktion in 7.3 genau dann konvex, wenn D positiv semidefinit ist (z.B. DANTZIG (1966)). Nach unserer Definition ist ein quadratisches Programm also immer ein konvexes Optimierungsproblem mit linearen Nebenbedingungen. Für quadratische Programme sind Lösungsverfahren bekannt, die als eine Verallgemeinerung des Simplexverfahrens angesehen werden können. Ist $D' = 0$, so geht 7.3 über in ein lineares Programm (vgl. z.B. DANTZIG (1966), BOOT (1964)). Wir kommen später darauf zurück.
Zunächst geben wir eine Verallgemeinerung von 7.1.

7.4 Definition:
Die zufällige Größe $\underset{\sim}{d}_i$ heißt stückweise gleichverteilt, falls es eine Menge $\{d_{ik} \in \mathbb{R} \mid 1 \le k \le r_i\}$ und $\vartheta_{ik} \ge 0$, $1 \le k \le r_i - 1$, $r_i \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für die Verteilungsfunktion F_i von $\underset{\sim}{d}_i$ gilt:

7.5
$$F_i(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad \lambda_i \le d_{i1} \\ F_i(d_{ik}) + \vartheta_{ik}(\lambda_i - d_{ik}) & \text{falls} \quad d_{ik} \le \lambda_i \le d_{i(k+1)} \\ 1 & \text{falls} \quad d_{ir_i} \ge \lambda_i \end{cases}$$

Es wird dabei stets

7.6
$$d_{i1} < d_{i2} < \ldots < d_{ir_i}$$

angenommen.

Die Verteilung einer stückweise gleichverteilten zufälligen Größe $\underset{\sim}{d}_i$ ist absolut-stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes. (Die "Dichte" ist stückweise konstant.) Nach Satz 1.4 ist dann die Zielfunktion

$$\Phi(x) = c' \cdot x + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \Phi_i(x)$$

von 2.5 stetig differenzierbar. Bezeichne grad $\Phi(\bar{x})$ den Gradienten von Φ in $\bar{x}$, d.h. den Zeilenvektor der partiellen Ableitungen von Φ.

Die in 7.4 gegebene Verallgemeinerung erscheint in zweifacher Hinsicht interessant. Zum ersten ist zu vermuten, daß ein zum Vorgehen in §4, §6 analoges Vorgehen für stückweise gleichverteilte $\underset{\sim}{d}_i$, $1 \leq i \leq \bar{m}$ auf ein Verfahren mit quadratischen "Ersatzprogrammen" führt, die dann mit einer der oben erwähnten Verallgemeinerungen des Simplexverfahrens gelöst werden können. Zum zweiten ist zu erwarten, daß mit stückweisen Gleichverteilungen gute erste Näherungslösungen für das zweistufige stochastische Programm 2.5 mit absolutstetigen zufälligen Größen gewonnen werden können.

Für das zweistufige stochastische Programm

7.7 $$\Phi(x) = \text{MIN!} \quad , \quad x \in X$$

ergibt sich für differenzierbares Φ aus den "lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen"

7.8 Satz:

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \geq 0$ ist genau dann optimale Lösung von 7.7, wenn es $\bar{\sigma} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\sigma} \geq 0$ gibt, so daß

(1) $$\text{grad } \Phi(\bar{x}) - \bar{\sigma}'A \geq 0 \qquad (\text{grad } \Phi(\bar{x}) - \bar{\sigma}'A) \cdot \bar{x} = 0$$

(2) $$b - Ax \leq 0 \qquad \bar{\sigma}'(b - Ax) = 0$$

Beweis: COLLATZ/WETTERLING (1971), §9.2

Wir kehren zunächst noch einmal zum quadratischen Programm 7.3 zurück und leiten einige Aussagen ab, auf die später zurückgegriffen wird.

7.9 Satz:

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \geq 0$ ist genau dann eine optimale Lösung von 7.3, wenn es ein $\bar{\eta} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$, $\bar{\eta} \geq 0$ gibt, so daß für

$$\bar{w} = c + D\bar{x} - \tilde{A}'\bar{\eta} \quad \text{und} \quad \bar{y} = \tilde{A}\bar{x} - \tilde{b}$$

gilt

7.10 $$\bar{w}' \cdot \bar{x} = \bar{\eta}' \cdot \bar{y} = 0$$

7.11 $$\bar{w} \geq 0 \quad , \bar{y} \geq 0 \quad .$$

Beweis: COLLATZ/WETTERLING (1971) §12.1

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem

7.12 $$\begin{pmatrix} \tilde{A} & -E & 0 & 0 \\ D & 0 & -E & -\tilde{A}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ -c \end{pmatrix}$$

mit $(\tilde{m} + n)$ Gleichungen und $2(\tilde{m} + n)$ Variablen.

7.13 Definition:
Eine Basislösung von 7.12 heißt komplementär, falls für $1 \leq j \leq n$ genau eine Variable von $\{w_j, x_j\}$ und für $1 \leq i \leq \tilde{m}$ genau eine Variable von $\{y_i, \eta_i\}$ Basisvariable ist.

Jede komplementäre Basislösung von 7.12 erfüllt dann 7.10.

Ist D = 0, d.h. ist 7.3 ein lineares Programm, so stimmt diese Definition mit der Definition komplementärer Basislösungen (für das Primal- und Dualprogramm) in der linearen Programmierung (vgl. DANTZIG (1966), Kap. 11) überein.
Jede zulässige (d.h. nicht negative) komplementäre Basislösung von 7.12 bestimmt eine optimale Lösung von 7.3.
Das folgende Lemma stellt eine Verallgemeinerung der beim

Beweis von Satz 4.16 benutzten Eigenschaft des Simplexverfahrens dar, daß bei Nichtentartung der zulässigen primalen Basislösung ein "Austauschschritt" zu einer besseren zulässigen Lösung führt.

7.14 Satz:
Sei $(\bar{x}',\bar{y}',\bar{w}',\bar{\eta}')'$ eine komplementäre Basislösung von 7.12, die bezüglich der "Basiskomponenten von x,y" nicht entartet ist, d.h.

$$x_j \text{ Basisvariable} \Rightarrow \bar{x}_j > 0$$

$$y_i \text{ Basisvariable} \Rightarrow \bar{y}_i > 0 .$$

Ist $\bar{x},\bar{y} \geq 0$ aber $\bar{\eta}_{i_o} < 0$ für ein $i_o \in \{1,2,\ldots,\tilde{m}\}$, so ist $\bar{x}$ keine optimale Lösung von 7.3.

Beweis: Bezeichne $Q(x) = c'\cdot x + \frac{1}{2} x'\cdot D\cdot x$ die Zielfunktion von 7.3. Nach Voraussetzung ist $\bar{x}$ zulässige Lösung von 7.3.

Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ mit $\tilde{A}x - y = \tilde{b}$ gilt

$$Q(x) - Q(\bar{x}) = c'\cdot(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} x'\cdot D\cdot x - \frac{1}{2} \bar{x}'\cdot D\cdot \bar{x}$$

$$= (c' + \bar{x}'D)(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})'D(x - \bar{x})$$

7.15

$$= (c' + \bar{x}'D - \bar{\eta}'A)\cdot(x - \bar{x}) + \bar{\eta}'(y - \bar{y}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})'D(x - \bar{x})$$

$$= \bar{w}'(x - \bar{x}) + \bar{\eta}'(y - \bar{y}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})'D(x - \bar{x}) \quad .$$

Aus den Voraussetzungen folgt dann, daß y_{i_o} Nichtbasisvariable ist und daß es ein $\theta^* > 0$ sowie $s^{(1)} \in \mathbb{R}^n$, $s^{(2)} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ mit

$$x_j \text{ Nichtbasisvariable} \Rightarrow \quad S_j^{(1)} = 0$$

7.16

$$y_i \text{ Nichtbasisvariable} \Rightarrow \begin{cases} S_i^{(2)} = 0 \ , \ i \neq i_o \\ S_i^{(2)} = 1 \ , \ i = i_o \end{cases}$$

gibt, so daß für

7.17 $$x(\theta) := \bar{x} + \theta \cdot S^{(1)} \ , \ y(\theta) := \bar{y} + \theta \cdot S^{(2)}$$

gilt:

$$x(\theta) \geq 0 \ , \ y(\theta) \geq 0 \ , \ \tilde{A}x(\theta) - y(\theta) = \tilde{b} \ , \ 0 \leq \theta \leq \theta^* \ .$$

Aus 7.15 folgt dann unter Verwendung von 7.16 7.17 und der Komplementarität der gegebenen Basislösung:

$$Q(x(\theta)) - Q(\bar{x}) = \theta \cdot \bar{w}' \cdot S^{(1)} + \theta \cdot \bar{\eta}' \cdot S^{(2)} + \theta^2 \cdot S^{(1)\prime} \cdot D \cdot S^{(1)}$$

$$= \theta \cdot (\bar{\eta}_{i_o} + \theta \cdot S^{(1)\prime} \cdot D \cdot S^{(1)}) \quad \forall \ 0 \leq \theta \leq \theta^* \ .$$

Da $\bar{\eta}_{i_o} < 0$ und $S^{(1)\prime} \cdot D \cdot S^{(1)} \geq 0$ gibt es ein $\theta_o > 0$, so daß

$\bar{\eta}_{i_o} + \theta \cdot S^{(1)\prime} \cdot D \cdot S^{(1)} < 0 \quad \forall \ 0 \leq \theta \leq \theta_o$.

Insgesamt folgt die Existenz einer zulässigen Lösung $\tilde{x}$ von 7.3 mit

$$Q(\tilde{x}) < Q(\bar{x}) \ . \qquad \square$$

Die Aussage von Lemma 7.14 geht auf Dantzig zurück, der darauf aufbauend ein Lösungsverfahren für 7.3 ableitete. Dieses Verfahren bestimmt ausgehend von einer komplementären Basislösung wie in Lemma 7.14 in einer endlichen Anzahl von "Pivotschritten" (Nichtentartung vorausgesetzt) entweder eine komplementäre zulässige Basislösung von 7.12 und damit auch eine optimale Lösung von 7.3 oder es stellt fest, daß

$\inf\{Q(x) \mid \tilde{A}x \geq \tilde{b}\ ,\ x \geq 0\} = -\infty$ ist (vgl. hierzu z.B. DANTZIG (1966); 24-4, BOOT (1964); chap. 9.2). Die dem Verfahren von Dantzig zugrundeliegende Idee findet man als allgemeines Konzept in LEMKE (1968).

Wir brauchen auf die Einzelheiten des Verfahrens zur Lösung von 7.3 hier nicht weiter einzugehen. Wichtig ist nur die Aussage von Lemma 7.14.

Wir kehren wieder zurück zum zweistufigen stochastischen Programm und nehmen nun an, daß die $\underset{\sim}{d}_i$, $1 \leq i \leq \bar{m}$ stückweise gleichverteilt sind und geben eine Darstellung der Zielfunktion von 7.7 auf gewissen Teilmengen von X. Um eine einheitliche Darstellung wählen zu können, setzen wir (vgl. §4, beachte 7.6) für $1 \leq i \leq \bar{m}$

$$d_{io} = -\infty\ ,\ d_{i(r_i+1)} = +\infty\ ,\ \vartheta_{io} = \vartheta_{ir_i} = 0$$

und vereinbaren

$$F_i(-\infty) = 0\ ,\ F_i(+\infty) = 1\ ^{①}\ ,\ 0\cdot(\pm\infty) = 0\ .$$

Für $l \in L := \{(l_1,\ldots,l_{\bar{m}}) \mid l_i \in \{0,1,2,\ldots,r_i\}\}$ und in Anlehnung an die Bezeichnungen in §4 definieren wir folgende Größen

$$g_{(l)} := (d_{1l_1},\ldots,d_{\bar{m}l_{\bar{m}}})',\ h_{(l)} := (d_{1(l_1+1)},\ldots,d_{\bar{m}(l_{\bar{m}}+1)})'$$

$$X_{(l)} := \{x \in X \mid g_{(l)} \leq Tx \leq h_{(l)}\}$$

$$\rho_{il_i} := -q_i^+ + (q_i^+ + q_i^-)(F_i(d_{il_i}) - \vartheta_{il_i}d_{il_i}),\ 1 \leq i \leq \bar{m}$$

$$\delta_{il_i} := (q_i^+ + q_i^-)\cdot\vartheta_{il_i}\ (\geq 0) \qquad 1 \leq i \leq \bar{m}$$

---

① vgl. VOGEL (1970), I.8

$$\gamma^{-}_{il_i} := -q^{-}_i \cdot \left(\sum_{k=0}^{l_i-1} \int_{d_{ik}}^{d_{i(k+1)}} \vartheta_{ik} \cdot \lambda_i \, d\lambda_i \right) \text{①} \qquad , \; 1 \le i \le \bar{m}$$

$$\gamma^{+}_{il_i} := q^{+}_i \left(\sum_{k=l_i+1}^{r_i} \int_{d_{ik}}^{d_{i(k+1)}} \vartheta_{ik} \cdot \lambda_i \, d\lambda_i \right) \text{①} \qquad , \; 1 \le i \le \bar{m}$$

$$\gamma_{il_i} := \gamma^{+}_{il_i} + \gamma^{-}_{il_i} + \frac{1}{2} \vartheta_{il_i} (q^{-}_i d^2_{il_i} + q^{+}_i d^2_{i(l_i+1)}) \; ,$$

$$1 \le i \le \bar{m}$$

$$\rho_{(1)} := (\rho_{1l_1}, \ldots, \rho_{\bar{m}l_{\bar{m}}})' \; ; \; \gamma_{(1)} := \sum_{i=1}^{\bar{m}} \gamma_{il_i}$$

$$\Delta_{(1)} := \begin{pmatrix} \delta_{1l_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{\bar{m}l_{\bar{m}}} \end{pmatrix}$$

$$c'_{(1)} := c' + \rho'_{(1)} \cdot T \; , \; D_{(1)} := T' \cdot \Delta_{(1)} \cdot T$$

Dann gilt:

7.18 Lemma:

(1) $D_{(1)}$ ist symmetrisch und positiv semidefinit.

(2) $(\forall\, x \in X_{(1)}) \quad \Phi(x) = c'_{(1)} \cdot x + \frac{1}{2} x' \cdot D_{(1)} \cdot x + \gamma_{(1)}$

(3) $(\forall\, x \in X_{(1)}) \quad \operatorname{grad} \Phi(\bar{x}) = c'_{(1)} + \bar{x}' D_{(1)}$.

Beweis:

(1) $D_{(1)}$ ist symmetrisch und wegen

---

① Für $l_i \in \{0, r_i\}$ werden die entsprechenden Summen gleich Null gesetzt.

$$x'D_{(1)}x = (x'T')\Delta_{(1)}\cdot(Tx) = \sum_{i=1}^{\bar{m}} \delta_{il_i}(T_i x)^2 \geq 0$$

auch positiv semidefinit.

(2) Für $1 \leq i \leq \bar{m}$ und $0 < l_i < r_i$ gilt (vgl. Beweis Lemma 4.1):

$$x \in X_{(1)} \Rightarrow \Phi_i(x) = \Phi_i^{(1)}(x) + \Phi_i^{(2)}(x) + \Phi_i^{(3)}(x)$$

mit

$$\Phi_i^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{l_i-1} \int_{d_{ik}}^{d_{i(k+1)}} [-q_i^-(\lambda_i - T_i x)\vartheta_{ik}]d\lambda_i$$

$$\Phi_i^{(2)}(x) = \sum_{k=l_i+1}^{r_i} \int_{d_{ik}}^{d_{i(k+1)}} [q_i^+(\lambda_i - T_i x)\vartheta_{ik}]d\lambda_i$$

$$\Phi_i^{(3)}(x) = \int_{d_{il_i}}^{T_i x} (-q_i^-(\lambda_i - T_i x)\vartheta_{il_i})d\lambda_i +$$

$$+ \int_{T_i x}^{d_{i(l_i+1)}} (q_i^+(\lambda_i - T_i x)\vartheta_{il_i})d\lambda_i \ .$$

Rechnet man diese Größen weiter aus, so ergibt sich

$$\Phi_i^{(1)}(x) = \gamma_{il_i}^- + q_i^- F_i(d_{il_i})\cdot T_i x$$

$$\Phi_i^{(2)}(x) = \gamma_{il_i}^+ - q_i^+(1 - F_i(d_{i(l_i+1)}))\cdot T_i x$$

$$\Phi_i^{(3)}(x) = \tfrac{1}{2}(q_i^+ + q_i^-)\vartheta_{il_i}(T_i x)^2 + \tfrac{1}{2}\vartheta_{il_i}(q_i^- d_{il_i}^2 + q_i^+ d_{i(l_i+1)}^2) -$$

$$- \vartheta_{il_i}(q_i^- \cdot d_{il_i} + q_i^+ \cdot d_{i(l_i+1)})(T_i x) \ .$$

Unter Verwendung von $\vartheta_{il_i}(d_{i(l_i+1)} - d_{il_i}) = F_i(d_{i(l_i+1)}) -$ $- F_i(d_{il_i})$ ergibt sich dann durch Zusammenfassen

7.19 $$\Phi_i(x) = \rho_{il_i} \cdot T_i x + \frac{1}{2} \delta_{il_i} (T_i x)^2 + \gamma_{il_i} .$$

Für $l_i \in \{0, r_i\}$ ergibt sich unter Berücksichtigung der getroffenen Vereinbarungen in analoger Weise die Gleichung 7.19 und damit Teil (2).

(3) Die Formel für den Gradienten ergibt sich direkt aus Teil (2). Man beachte, daß für $x \in X_{(l)} \cap X_{(\bar{l})}$, $l \neq \bar{l}$ die Gleichung

$$c'_{(l)} + x'D_{(l)} = c'_{(\bar{l})} + x'D_{(\bar{l})}$$

erfüllt ist. □

Wir betrachten dann für festes $\bar{l} \in L$ das quadratische Programm

$$(QP)_{(\bar{l})} \qquad c'_{(\bar{l})} x + \frac{1}{2} \cdot x' \cdot D_{(\bar{l})} \cdot x = \text{MIN!}$$
$$\text{bzgl. } x \in X_{(\bar{l})} .$$

Wir fassen die Nebenbedingung von $(QP)_{(\bar{l})}$ zusammen zu

7.20 $$\tilde{A}x \geq \tilde{b}_{(\bar{l})} , \quad x \geq 0$$

und vereinbaren (vgl. §4), daß nur die tatsächlich einschränkenden Nebenbedingungen (d.h. $l_i \notin \{0, r_i\}$) in 7.20 aufgenommen werden. Ist $0 < \bar{l}_i < r_i$, $1 \leq i \leq \bar{m}$ dann gilt also

7.21
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -T \\ T \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{b}_{(\bar{1})} = \begin{pmatrix} b \\ -h_{(1)} \\ g_{(\bar{1})} \end{pmatrix}$$

($\tilde{A}$ ist dann eine $(\tilde{m} \times n)$-Matrix, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$, $\tilde{m} = m + 2\bar{m}$). Andernfalls sind gewisse Zeilen aus $\tilde{A}$ gestrichen und die Komponenten von $\tilde{b}_{(\bar{1})}$ entsprechend angepaßt.

Wir betrachten dann das $(QP)_{(\bar{1})}$ zugeordnete lineare Gleichungssystem (vgl. 7.12):

7.22
$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & -E & 0 & 0 \\ D_{(\bar{1})} & 0 & -E & -\tilde{A}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{(\bar{1})} \\ -c_{(\bar{1})} \end{pmatrix}$$

Gemäß 7.21 zerfällt dabei $\bar{\eta}$ in 3 Teilvektoren und wir setzen voraus, daß für jede komplementäre Basislösung von 7.22

7.23
$$\bar{\eta}' = (\bar{\sigma}', \bar{\mu}', \bar{\nu}') \quad , \quad \bar{\sigma} \in \mathbb{R}^{m} \quad , \quad \bar{\mu}, \bar{\nu} \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$$

geschrieben worden ist. Dabei würde für "gestrichene" Nebenbedingungen die entsprechende Komponente von $\bar{\mu}$ bzw. $\bar{\nu}$ gleich Null gesetzt. Faßt man die zugehörige Komponente von $\bar{y}$ als Basisvariable auf, so stellen diese Vereinbarungen lediglich eine Möglichkeit dar, das weitere Vorgehen übersichtlich und einheitlich darzustellen.

Mit

$$Q_{(\bar{1})}(x) = c'_{(\bar{1})} \cdot x + \frac{1}{2} x' D_{(\bar{1})} x$$

gilt:

7.24 Satz:

(1) Aus $X_{(\bar{1})} \neq \emptyset$ und

$$\inf\{Q_{(\bar{l})}(x) \mid x \in X_{(\bar{l})}\} = -\infty$$

folgt

$$\inf\{\Phi(x) \mid x \in X\} = -\infty .$$

(2) Sei $(\bar{x}',\bar{y}',\bar{w}',\bar{\eta}')'$ mit $\bar{\eta}' = (\bar{\sigma}',\bar{\mu}',\bar{\nu}')$ wie in 7.23 eine komplementäre zulässige Basislösung von 7.22 mit

7.25 $$\bar{\mu} = \bar{\nu} = 0 .$$

Dann gilt

$$\min\{\Phi(x) \mid x \in X\} = \Phi(\bar{x}) .$$

Beweis:

(1) folgt mit Lemma 7.18 (2) und $X_{(\bar{l})} \subseteq X$

(2) folgt aus Lemma 7.18 (3), da wegen 7.25 die Bedingungen von Satz 7.9 in die Optimalitätsbedingungen (1), (2) von Satz 7.8 übergehen.

□

Sei nun $(\bar{x}',\bar{y}',\bar{w}',\bar{\eta}')$ eine zulässige komplementäre Basislösung, für die 7.25 nicht erfüllt ist. Ist $\bar{\mu}_i > 0$, so folgt aus der Komplementarität (oder nach Vereinbarung) $\bar{\nu}_i = 0$ und genauso umgekehrt $\bar{\nu}_i > 0 \Rightarrow \bar{\mu}_i = 0$. Darüberhinaus gilt stets $\bar{l}_i = 0 \Rightarrow \bar{\nu}_i = 0$ und $\bar{l}_i = r_i \Rightarrow \bar{\mu}_i = 0$. Damit ist $\hat{l} = (\hat{l}_1,\ldots,\hat{l}_m)$ mit

7.26 $$\hat{l}_i = \begin{cases} \bar{l}_i & \text{falls } \bar{\mu}_i = \bar{\nu}_i = 0 \\ \bar{l}_i + 1 & \text{falls } \bar{\mu}_i > 0 \\ \bar{l}_i - 1 & \text{falls } \bar{\nu}_i > 0 \end{cases}$$

eindeutig definiert und $\hat{l} \in L$.
$\hat{l}$ erzeugt dann ein quadratisches Programm (QP)$_{(\hat{l})}$ und ein zugeordnetes lineares Gleichungssystem

7.27
$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & -E & 0 & 0 \\ D_{(\hat{l})} & 0 & -E & -\tilde{A}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{(\hat{l})} \\ -c_{(\hat{l})} \end{pmatrix}$$

und es gilt:

7.28 Satz:
Ist die zulässige komplementäre Basislösung $(\bar{x}',\bar{y}',\bar{w}',\bar{\eta}')'$ von 7.22 bezüglich der Basiskomponenten von x und y nichtentartet, so folgt aus $\hat{l} \neq \bar{l}$

7.29
$$\Phi(\bar{x}) > \inf\{\Phi(x) \mid x \in X_{(\hat{l})}\} \geq \inf\{\Phi(x) \mid x \in X\} .$$

Beweis: Analog dem Beweis von Satz 4.9 läßt sich auch hier aus $(\bar{x}',\bar{y}',\bar{w}',\bar{\eta}')'$ eine komplementäre Basislösung $(\bar{x}',\hat{y}',\hat{w}',\hat{\eta}')'$ für 7.27 konstruieren. Wesentlich ist dabei, daß $\bar{x},\hat{y} \geq 0$, $\hat{\eta} \not\geq 0$ und daß diese Basislösung bezüglich der Basiskomponenten von x und y nicht entartet ist. Satz 7.14 liefert dann zusammen mit Lemma 7.18 die Behauptung. □

Auch hier beschreibt dann der Übergang von $\bar{l}$ auf $\hat{l}$ einen Schritt des Lösungsverfahrens,und die zu 4.22 analoge Beschreibung für dieses Verfahren ist offensichtlich.
In WETS (1975) wird eine entsprechende Verallgemeinerung des Verfahrens aus WETS (1974) (vgl. 2.9) angegeben.
Einschränkend zu dem hier vorgeschlagenen Lösungsverfahren mit quadratischen Ersatzproblemen ist zu sagen, daß die numerische Lösung quadratischer Programme problematischer als die linearer Programme ist. Ob die daraus resultierenden

Schwierigkeiten die "besseren Approximationseigenschaften" aufwiegen, hängt stark von dem zur Lösung von $(QP)_{(\bar{I})}$ verwendeten Verfahren ab. Die Entwicklung auf diesem Gebiet ist noch nicht so weit fortgeschritten wie bei der Linearen Programmierung.

Schlußbemerkung

Alle in dieser Arbeit angegebenen Lösungsalgorithmen stützen sich wesentlich auf Lösungsverfahren für deterministische Probleme, die unabhängig von der stochastischen Fragestellung entwickelt wurden. Alle diese Programme liegen als implementierte Unterprogramme vor. Die numerischen Eigenschaften der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Verfahren werden dabei von denen der verwendeten Unterprogramme bestimmt.
Auf die explizite Angabe der zum Austesten benutzten FORTRAN-Programme wurde hier verzichtet, da diese neben dem Aufruf der oben erwähnten Unterprogramme nur noch kleine Programmabschnitte enthalten, die das jeweilige Ersatzproblem erzeugen. Darin liegt der wesentliche Vorteil der hier vorgeschlagenen Algorithmen. Auf einige der Möglichkeiten, dieses Konzept auf andere Situationen zu übertragen, wurde schon hingewiesen. Insbesondere sei auf die Möglichkeit verwiesen, mit Hilfe dieser Verfahren eine gegebene Diskretisierung "gezielt" zu verfeinern. Dies ist möglich, da zur Erzeugung der "Ersatzprogramme" die Verteilung nur lokal bekannt zu sein braucht.

Literaturverzeichnis

Bazaraa, S./Jarvis, J.J. (1977), Linear Programming and Network Flows, Wiley & Sons, N.Y.

Beer, K. (1977), Lösung großer linearer Optimierungsaufgaben, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Boot, J. (1964), Quadratic Programming, North-Holland Publ. Company, Amsterdam

Collatz, L./Wetterling, W. (1971), Optimierungsaufgaben, Springer-Verlag, 2. Aufl., Berlin

Dantzig, G.B. (1966), Lineare Programmierung und Erweiterungen, Springer-Verlag, Berlin

El Agizy, M. (1967), Two-Stage Programming under Uncertainty with Discrete Distribution Functions, OR 15, 55 - 70

Elmaghraby, S.E. (1960), Allocation under Uncertainty when the Demand has Continuous Distribution Function, Management Science 6, 270 - 294

Ford, L.R./Fulkerson, D.E. (1962), Flows in Networks, Princeton University Press, Princeton

Garstka, S.J./Rutenberg, D.P. (1973), Computation in Discrete Stochastic Programs with Recourse, OR 21, 112 - 122

Holmes, R.B. (1972), A Course on Optimization and Best Approximation, Springer-Verlag, Berlin

Kall, P. (1974), Approximations to Stochastic Programs with Complete Fixed Recourse, Numerische Mathematik 22, 333 - 339

Kall, P. (1976), Stochastic Linear Programming, Ökonometrie und Unternehmensforschung XXI, Springer-Verlag, Berlin

Kall, P. (1979), Computational Methods for Solving Two-Stage Stochastic Linear Programming Problems, Journal of Applied Mathematics and Physics 30, 261 - 271

Kolbin, V.V. (1977), Stochastic Programming, Theory and Decision Library, Vol. 14, Reidel Publishing Company

Lemke, C.E. (1968), On Complementary Pivot Theory, in: Mathematics of the Decision Sciences, Part 1, ed. G.B. Dantzig, A.F. Veinott

Milder, J.L./Wollmer, R.D. (1969), Stochastic Programming Models for Scheduling Airlift Operations, Naval Research Log. Quarterly 16, 315 - 330

Stancu-Minasian, I.M./Wets, M.J. (1976), A Research Bibliography in Stochastic Programming 1955 - 1975, OR 24, 1078 - 1119

Strazicky, B. (1974), On an Algorithm for Solution of the Two-Stage Stochastic Programming Problem, OR-Verfahren XIX, 142 - 156

Szwarc, W. (1964), The Transportation Problem with Stochastic Demand, Management Science 11, 33 - 50

Vogel, W. (1967), Lineares Optimieren, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig

Vogel, W. (1970), Wahrscheinlichkeitstheorie, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen

Werner, M. (1973), Ein Lösungsansatz für ein spezielles zweistufiges stochastisches Optimierungsproblem, Zeitschrift für Operations Research 17, 119 - 128

Wets, R. (1974), Solving Stochastic Programs with Simple Recourse I, Tech. Report, University of Kentucky, Lexington

Wets, R. (1975), Solving Stochastic Programs with Simple Recourse II, Proc. of the John Hopkins Conference on Systems Science and Information

Williams, A.C. (1963), A Stochastic Transportation Problem, OR 11, 759 - 770

Williams, A.C. (1965), On Stochastic Linear Programming, SIAM Journal of Applied Mathematics 13, 927 - 940

Wilson, D. (1972), An A Priori Bounded Model for Transportation Problems with Stochastic Demand and Integer Solutions, AIIE, Transactions 4, 186 - 193

Wilson, D. (1975), A Mean Cost Approximation for Transportation Problems with Stochastic Demand, Naval Research Log. Quarterly 22, 181 - 187

Yudin, D.B./Tsoy, E.V. (1974), Integer Valued Stochastic Programming, Engineering Cybernetics 12, 1 - 8

Zionts, S. (1974), Linear and Integer Programming, Prentice-Hall International Series in Management, Prentice-Hall, New-Jersey.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.
Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. Walter Vogel, unter dessen Leitung diese Arbeit entstanden ist, für seine Förderung und Unterstützung.
Weiter möchte ich Herrn Professor Dr. Ulrich Eckhardt und Herrn Professor Dr. Roger Wets für ihre wertvollen Anregungen und Ratschläge danken.
Ebenfalls zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Professor Dr. Rainer Hettich und Herrn Dr. Paessens, die FORTRAN-Versionen der benötigten Unterprogramme zur Verfügung stellten.
Schließlich sei der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung im Rahmen des Sonderforschungsbereiches gedankt.

Lebenslauf

Am 2o. April 195o wurde ich als Sohn des Finanzbeamten Leonhardt Cleef und seiner Ehefrau Johanna in Duisburg geboren.
Von 1956 bis 1964 besuchte ich die katholische Volksschule an der Gneisenaustraße in Duisburg.
Danach besuchte ich in Duisburg das Theodor-Heuss--Gymnasium, ein sozialwissenschaftliches Aufbaugymnasium und legte dort im Juni 197o die Reifeprüfung ab.
Im Wintersemester 197o/71 begann ich mit dem Studium der Mathematik und Informatik an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität in Bonn, das ich im Januar 1976 mit der Diplom-Hauptprüfung für Studierende der Mathematik abschloß.
Seit März 1976 bin ich als wissenschaftlicher Angestellter im Sonderforschungsbereich 72 am Institut für Angewandte Mathematik und Informatik der Universität Bonn tätig.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren J. Blatter, K.H. Böhling, O. Endler, P. Gabriel, H. Karcher, G. Nöldeke, E. Peters, H. Schiek, J. Tits und W. Vogel.